# EXPÉRIENCES

## SUR LE REMOU

## ET SUR LA PROPAGATION DES ONDES

PAR GEORGE BIDONE.

TURIN,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE
1820.

*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Turin ,*

*Tom. XXV.*

# EXPÉRIENCES

SUR

# LE REMOU ET SUR LA PROPAGATION DES ONDES

PAR GEORGE BIDONE.

*Lu dans la séance du 12 décembre 1819.*

Les expériences dont j'ai l'honneur de rendre compte à la Classe, se rapportent à deux objets distincts. Les unes sont relatives au remou, et les autres à la propagation des ondes.

Le cas le plus simple qu'on puisse se proposer sur le remou, est celui dans lequel on barre un canal régulier, d'un bord à l'autre sur toute sa largeur, par une digue perpendiculaire au courant, établie sur le fond du canal, et élevée à une hauteur moindre que celle des parois du canal, et telle que toutes les eaux puissent passer sur la digue, sans déborder en aucun endroit. L'Établissement de cette digue ou de ce barrage à travers le canal, occasionne un regonflement dans le courant supérieur, qui est forcé à s'élever jusqu'à ce que le volume de l'eau qui passe sur la digue, soit égal à la dépense du canal, que l'on suppose donnée et invariable. Parvenu à cette élévation, le courant est de nouveau réduit

à un état permanent, conforme à la nouvelle circonstance de son lit. Dans cet état, le regonflement de l'eau a lieu sur une certaine longueur à l'amont de la digue, et toutes les sections du courant, prises sur cette longueur, ont une plus grande hauteur que celle qu'elles avaient avant l'établissement de la digue. Cette longueur, comptée depuis la digue, est ce qu'on nomme l'étendue du remou.

Tel est le cas sur lequel j'ai fait mes expériences. Pour ne laisser aucun doute sur l'exactitude des résultats obtenus par la mesure immédiate, j'ai choisi des canaux rectilignes et rectangulaires, dont la pente du fond et la vitesse de l'eau, étaient assez considérables pour faire sortir toutes les circonstances du phénomène d'une manière très-visible et très-marquée, et telle que les erreurs possibles de l'observation ne peuvent être, même dans le cas le plus défavorable, qu'une très-petite partie du résultat total, ni avoir par conséquent d'influence sensible sur l'ensemble des faits observés.

Parmi les divers résultats donnés directement par ces expériences, je noterai ici les deux suivans, savoir: 1.° l'étendue du remou a toujours été moindre que la distance à laquelle l'horizontale, tirée du point le plus élevé du regonflement, allait rencontrer la surface du courant, à l'amont de la digue. 2.° La surface de l'eau, sur toute la longueur du regonflement, a toujours été convexe par rapport à l'observateur, la convexité étant très-légère dans la partie intermédiaire de cette longueur, et augmentant rapidement près des deux extrémités du regonflement, où elle devenait très-considérable.

Ces résultats que j'ai constamment obtenus dans ces expériences, sont bien différens de ce que quelques auteurs, d'ailleurs fort estimables, se sont figuré, relativement à la longueur du regonflement et à la courbure de la surface de l'eau, dans cette longueur.

Il est essentiel de remarquer ici que le cas du remou auquel se rapportent ces expériences, est tel que les eaux ne laissent point d'atterrissemens dans le lit du canal, dont toutes les dimensions demeurent par conséquent les mêmes: et l'on voit que le cas où les eaux peuvent faire des atterrissemens à l'amont de la digue, est tout-à-fait différent de celui que l'on considère ici.

Après avoir exposé les résultats obtenus directement par l'expérience, je propose une formule qui y satisfait assez bien, et à l'aide de laquelle je forme les équations pour calculer, au moins approximativement, l'étendue et la hauteur du remou occasionné par une digue donnée. Par la même formule on peut aussi expliquer les principales circonstances que l'on observe dans le remou, selon la hauteur plus ou moins grande des digues ou des obstacles qui le produisent, par rapport à celle du courant. Enfin je donne les équations pour calculer la vitesse avec laquelle le remou se propage, lorsqu'on barre entiérement le canal.

Ces expériences sur le remou m'ont fourni l'occasion d'en faire aussi quelques unes sur la mesure de l'eau courante dans un canal. J'en ai conservé la note et j'en compare les résultats avec ceux de la formule aussi simple que rigoureuse que

M. Eytelwein a tirée de la théorie du mouvement linéaire des fluides, combinée avec la loi de la résistance qu'ils éprouvent, en se mouvant dans un canal. L'accord entre les résultats de l'expérience et ceux de cette formule, est si satisfaisant, qu'on ne peut s'empêcher de remarquer combien sont inutiles et souvent même nuisibles aux progrès de l'hydrométrie, toutes les tentatives, assez fréquentes sur cette matière, lesquelles ne sont pas dirigées et eclairées par une théorie rigoureuse et par une étude approfondie des lois de la mécanique.

Telles sont les expériences et les résultats que j'expose dans la première partie de ce mémoire.

La deuxième partie contient les expériences que j'ai faites sur la propagation des ondes. Le problème du mouvement des ondes, pris dans sa généralité, était encore sans solution, lorsque M. Poisson donna, dans un savant mémoire, la théorie des ondes. En partant des équations fondamentales du mouvement des fluides, et en adoptant une manière très-simple pour produire l'ébranlement primitif à la surface du liquide en repos, ce grand Géomètre, par un heureux emploi des plus récentes et fécondes découvertes faites dans l'analyse, a su déduire de ces équations toutes les loix du mouvement direct des ondes, qu'il a développées dans son mémoire.

C'est pour comparer les résultats de cette théorie avec ceux de l'observation, que j'ai entrepris des expériences sur la propagation des ondes. Avant d'en exposer les résultats, j'ai cru nécessaire de donner le détail de ce que l'observation m'a présenté par rapport à la manière de produire les ondes à

la surface du liquide, adoptée par M. Poisson. J'ai reconnu par là quelles étaient les ondes ainsi produites, que je pouvais réellement regarder comme non soumises à l'influence de toute circonstance étrangère aux considérations, d'après lesquelles on a déduit, par le calcul, les formules du mouvement des ondes. Après cela j'expose les résultats que j'ai obtenus dans les cas, où toutes les conditions requises par la théorie, étaient exactement remplies. L'accord entre ces résultats et ceux du calcul est merveilleux, et tel à ne laisser aucun doute, que si l'on parvenait à remplir pour tous les points de cette théorie, les conditions qu'elle exige, tous les résultats de l'observation s'y trouveraient parfaitement conformes.

Toutes ces expériences, celles sur le remou, et celles sur la propagation des ondes, ont été faites en septembre et octobre derniers à l'Établissement Hydraulique de l'Université Royale. Les résultats ont été pris en pieds de Paris, parce que dans cet Établissement, lors de sa fondation, tout a été construit et réglé d'après cette mesure. L'illustre Président de cette Académie, S. E. M. le Comte Balbe, Ministre et premier Secrétaire d'État pour les affaires intérieures, et Chef de l'Université, a bien voulu, à ma prière, accorder les fonds nécessaires pour faire ces expériences. C'est une nouvelle preuve de son intérêt particulier pour ce bel établissement, qu'il a déjà, dans d'autres temps, enrichi d'un nouveau bâtiment, et d'un emplacement spacieux, ajouté à l'ancien local. Par ces agrandissemens il n'y a plus maintenant qu'à y construire

les ouvrages convenables, pour mettre cet Établissement en état de servir à toutes les grandes recherches expérimentales qui restent encore à faire sur un grand nombre de points très-importants de l'Hydrodynamique.

# PREMIÈRE PARTIE.

## EXPÉRIENCES SUR LE REMOU.

### §. I.

*Manière dont ces expériences ont été faites.*

1. La première opération était celle d'introduire et d'entretenir dans le canal un volume d'eau exactement connu, et de lui donner le temps d'y prendre un cours bien établi et permanent. Cela fait, on mesurait, à l'amont de l'endroit où l'on devait établir les digues, la hauteur de l'eau dans diverses sections de plus en plus éloignées de ce même endroit. Cette hauteur, dans chaque section, était prise sur trois lignes perpendiculaires au fond, deux desquelles étaient près des parois, et l'autre était au milieu du canal. La moyenne de ces trois hauteurs est ce que j'ai pris pour la hauteur de la section du courant, et que j'ai porté dans les tableaux des expériences. Dans ces mesures et dans les autres analogues j'ai toujours tenu compte des fractions de ligne.

2. Après cela je faisais établir la digue. Elle entrait dans des rainures pratiquées dans le fond et dans les parois du canal, et se trouvait ainsi parfaitement verticale, et perpendiculaire au parois du canal. Avec du mastic préparé exprès, dont on enduisait les bords de la digue, on empêchait toute issue de l'eau à travers les rainures, de sorte que la dépense entière du canal, était forcée à passer par dessus la digue. Chaque digue dont je me suis servi, était faite d'une seule pièce de bois fort, bien dressée et bien équarrie, de l'épaisseur d'un pouce. La digue étant ainsi invariablement établie, on en mesurait la hauteur au dessus du fond en trois endroits, dont deux étaient près des parois et l'autre au milieu du canal. La moyenne de ces trois hauteurs est ce que j'ai toujours pris pour la hauteur de la digue.

3. Lorsque la digue était ainsi établie, et que le courant dans le canal s'était de nouveau réduit à un état permanent, relatif à cette nouvelle circonstance de son lit, on prenait premièrement, à peu de distance et à l'amont de la digue, la hauteur de la surface de l'eau au-dessus du fond correspondant du canal, et de cette hauteur on concluait celle de la même surface par rapport au sommet de la digue. Ensuite on mesurait la longueur du regonflement ou l'étendue du remou occasionné par la digue. L'endroit où la section du canal prenait subitement, par l'effet du remou, une plus grande hauteur, était très-visible et très-marqué, et il est représenté dans les figures 3.^e^ et 6.^e^ Les distances portées dans les tableaux

sont relatives à l'étendue du remou près des deux parois du canal, et au fil de l'eau du courant. Enfin on mesurait la hauteur de l'eau dans une section voisine et à l'amont de l'origine apparente du regonflement, pour voir si la hauteur de cette section était altérée par l'effet du remou; ce que l'on trouvera noté à la suite de chaque tableau.

4. Les opérations précédentes étant achevées, on ôtait la digue, et on la remplacait par une autre plus haute, en conservant toujours dans le canal le même volume d'eau. On faisait sur la nouvelle digue, et sur le nouvel état de l'eau dans le canal, toutes les opérations qu'on vient d'exposer dans les deux n.os précédens. On augmentait ainsi, d' une expérience à l'autre, la hauteur des digues au-dessus du fond du canal: elles avaient d'abord été faites de manière que cette augmentation successive de hauteur aurait dû être d'un pouce; mais comme dans chaque expérience on enduisait de mastic les bords de la digue qui entraient dans les rainures, il arrivait que la couche de cet enduit sur le bord inférieur de la digue n'avait pas la même épaisseur, dans les différentes digues qu'on employait. Ainsi il en résultait pour les digues successives, un enfoncement divers dans la rainure du fond, et tel que la différence entre la hauteur d'une digue, et celle de la suivante, par rapport au fond du canal, n'était plus en général d'un pouce juste. Par la même cause, le sommet, ou le bord supérieur de la digue pouvait aussi ne pas être parfaitement horizontal, et parallèle au fond, dans les sens de

la largeur du canal : c'est pour cela qu'on prenait la hauteur de chaque digue au-dessus du fond, en trois endroits différens, ainsi qu'on l'a dit plus haut.

Dans toutes ces expériences la hauteur de chaque digue au-dessus du fond du canal était telle que la chûte de l'eau par le sommet de la digue était parfaitement libre, c'est-à-dire que la hauteur de l'eau, à l'aval de la digue, n'arrivait jamais à égaler la hauteur de la digue.

5. Après avoir observé le remou produit par des digues successivement plus hautes, la dépense du canal étant toujours la même, je changais cette dépense, et je commençais, dans le même canal, une nouvelle suite d'expériences, en établissant successivement les mêmes digues, et en faisant sur chacune d'elles les opérations qu'on a exposées précédemment. Enfin j'ai fait une suite de pareilles expériences dans un autre canal de pente un peu différente de celle du premier canal.

6. Les canaux, dont je me suis servi, avaient été construits, lors de la fondation de l'Établissement, avec des pentes uniformes: mais le tems, et les réparations qu'on a pu y faire postérieurement, en ont altéré les pentes primitives. Cette altération est à la vérité peu sensible, et pour tout autre objet on pourrait la négliger, et se tenir à la pente moyenne, qui diffère peu de la pente primitive: mais pour des expériences sur le remou j'ai cru devoir prendre le profil actuel du fond de chacun de ces canaux, et en marquer les diverses inclinaisons à des points assez près l'un de l'autre pour que la pente entre l'un de ces points et le suivant pût être regardée

comme uniforme. Ces profils ont été pris avec l'eau stagnante; ils sont représentés dans les figures 1.ère et 2.e et j'en donne ci-après les résultats. La largeur de ces canaux est constamment de 12 pouces, tant à l'aval qu'à l'amont de l'endroit où l'on établissait les digues; de sorte que celles-ci avaient aussi la largeur de 12 pouces, sans y comprendre la partie qui entrait dans les rainures. Le fond et les parois des canaux sont en maçonnerie, et les parois sont verticales et perpendiculaires au fond.

7. Je designerai ces canaux par *canal n.° 1* et *canal n.° 2.* Les profils de leurs fonds se rapportent à la ligne horizontale, qui passe par le point du fond, sur lequel on établissait les digues. Les verticales positives qui ont lieu pour les points du fond à l'amont de la digue, indiquent les élévations de ces points au-dessus de cette horizontale; les verticales négatives, qui ont lieu pour les points du fond à l'aval de la digue, indiquent les abaissemens de ces points au-dessous de la même horizontale. Les distances horizontales sont toutes comptées depuis le point où la verticale est zéro, c'est-à-dire depuis le point du fond où l'on établissait la digue: elles sont positives pour les verticales positives, et négatives pour les verticales négatives.

| PROFIL DU FOND DU CANAL N.° 1. | | PROFIL DU FOND DU CANAL N.° 2. | |
|---|---|---|---|
| Distances horizontales comptées depuis le point où la verticale est zéro | Longueur des verticales | Distances horizontales comptées depuis le point où la verticale est zéro | Longueur des verticales |
| *pieds. pouc. lign.* | *pouc. lign.* | *pieds. pouc. lign.* | *pouc. lign.* |
| + 34. 4. 4 | + 13. 8. $\frac{10}{12}$ | + 15. 7. 0 | + 11. 6. $\frac{6}{12}$ |
| + 30. 0. 0 | + 11. 1. $\frac{2}{12}$ | + 0. 10. 0 | + 0. 7. $\frac{2}{12}$ |
| + 24. 0. 0 | + 8. 4. $\frac{7}{12}$ | 0. 0. 0 | 0. 0. 0 |
| + 18. 0. 0 | + 6. 0. 0 | — 6. 0. 0 | — 4. 6. $\frac{5}{12}$ |
| + 12. 0. 0 | + 3. 4. $\frac{9}{12}$ | | |
| + 6. 0. 0 | + 1. 6. $\frac{8}{12}$ | | |
| + 3. 0. 0 | + 0. 8. $\frac{5}{12}$ | | |
| 0. 0. 0 | 0. 0. 0 | | |
| — 18. 0. 0 | — 4. 2. $\frac{5}{12}$ | | |

On voit par ces profils, que les fonds de ces canaux sont formés par une suite de plans différemment inclinés à l'horizont, de sorte qu'une ligne d'élévation, par exemple, correspond à une distance horizontale plus ou moins grande selon le plan du fond auquel elle se rapporte. On n'a pris ces

profils que sur une longueur de chaque canal, suffisante pour mesurer l'étendue du remou, et observer son influence dans le cours de l'eau. Dans toutes ces expériences, ainsi qu'on le verra bientôt, la plus grande distance à laquelle soit arrivé le remou à l'amont de la digue, est moindre que 21 pieds, dans le canal n.° 1, et moindre que 13 pieds, dans le canal n.° 2.

## §. II.

*Tableaux des expériences et principaux résultats qu'ils offrent.*

### I. TABLEAU.

8. Canal n.° 1. Largeur constante du canal, $a = 12$ pouces.

Dépense constante du canal, dans une seconde, $p = 0{,}6060$. *pied. cub.*

Avant d'établir les digues, j'ai pris la hauteur de l'eau dans diverses sections, et j'ai obtenu ce qui suit.

| Distances des sections dont on a pris la hauteur, comptées depuis l'endroit où l'on établissait les digues, et à l'amont de cet endroit. | *h* ou hauteur de l'eau dans chaque section. | *v* ou vitesse moyenne conclue de la section et de la dépense du canal. |
|---|---|---|
| *pieds* | *pouc. lign.* | *pieds* |
| 6 | 1. 7. $\frac{5}{12}$ | 4,4943 |
| 12 | 1. 8. $\frac{9}{12}$ | 4,2055 |
| 18 | 1. 9. $\frac{1}{12}$ | 4,1390 |
| 24 | 1. 7. $\frac{7}{12}$ | 4,4560 |

Ayant établi les digues, l'une après l'autre, j'ai eu les résultats suivans.

| Expériences | *D* ou hauteur de la digue au-dessus du fond où elle était établie | *b* ou hauteur de la surface du regonflement par rapport au sommet de la digue, prise à 3 pieds à l'amont de la digue | *E* ou étendue du remou | | | Longueur de l'horizontale tirée par le point le plus élevé du regonflement, comptée depuis la digue jusqu'à la rencontre de la surface du courant, à l'amont de la digue |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | à la paroi à droite du courant | au fil de l'eau | à la paroi à gauche du courant | |
| | *pouc. lign.* | *pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* |
| 1.ère | 4. 11. $\frac{5}{12}$ | 3. 9. $\frac{2}{12}$ | 13. 9. 8 | 13. 4. 0 | 13. 11. 9 | 20. 7. 0 |
| 2.e | 5. 10. $\frac{10}{12}$ | 3. 8. $\frac{6}{12}$ | 15. 9. 0 | 15. 0. 0 | 15. 9. 6 | 22. 11. 0 |
| 3.e | 6. 11. $\frac{2}{12}$ | 3. 9. $\frac{2}{12}$ | 17. 11. 9 | 17. 6. 8 | 18. 2. 0 | 25. 6. 0 |
| 4.e | 8. 0. 0 | 3. 8. $\frac{11}{12}$ | 20. 9. 7 | 20. 1. 4 | 20. 8. 9 | 27. 10. 0 |

Pendant que la digue de la 3.e expérience était établie, et que le remou qu'elle occasionnait, s'était invariablement fixé aux distances notées dans le tableau, j'ai pris la hauteur de la section du courant à 20 pieds de distance et à l'amont de la digue, et j'ai trouvé pour cette hauteur 1.pouc. 9.lign. Ayant ensuite ôté la digue, et donné au remou le temps de disparaître entièrement, la dépense du canal étant toujours la même, j'ai pris de nouveau la hauteur de cette section et je l'ai retrouvée précisément la même que lorsque la digue était établie dans le canal.

Dans les expériences de ce tableau, et des deux suivans, faites dans le canal n.° 1, l'endroit le plus élevé du regonflement se trouvait à trois pieds à l'amont de la digue. La surface de ce regonflement, de part et d'autre de cet endroit, était très-légèrement convexe jusque près de ses deux extrémités, l'une au-dessus de la digue, l'autre à l'origine du regonflement, où la convexité augmentait rapidement, et devenait très-considérable. Les figures 3.e et 4.e représentent en échelle le profil et le plan du canal et du courant, relatifs à la 1.ère expérience du tableau précédent. Pour les expériences du IV. tableau, faites dans le canal n.° 2, l'endroit le plus élevé du regonflement était à 10 pouces, environ, à l'amont de la digue, et la surface du regonflement avait la même forme que celle qu'on vient de décrire.

Je dois encore observer que la grande vitesse du courant dans ces expériences et dans les suivantes, provenait de la pente considérable qu'avaient les canaux dans les parties de

leur cours supérieures à celle où l'on faisait les expériences. J'ai cru inutile pour notre objet de rapporter les profils de ces parties; car la dépense étant exactement connue avant d'être introduite dans les canaux, par les appareils très-précis que fournit l'Établissement, et les sections du courant étant mesurées directement avec le plus grand soin, on avait par-là la vitesse moyenne avec une précision qu'aucun autre procédé ne pourrait donner.

II. TABLEAU.

9. Canal n.° 1. Dépense constante du canal, dans une seconde, $p = 1{,}0255$ pied. cub. Avant d'établir les digues, j'ai pris la hauteur de l'eau dans diverses sections, et j'ai obtenu ce qui suit.

| Distances des sections dont on a pris la hauteur, comptées depuis l'endroit où l'on établissait les digues, et à l'amont de cet endroit. | $h$ ou hauteur de l'eau dans chaque section. | $v$ ou vitesse moyenne conclue de la section et de la dépense du canal. |
|---|---|---|
| *pieds* | *pouc. lign.* | *pieds* |
| 6 | 2. 3. $\frac{9}{12}$ | 5,3215 |
| 12 | 2. 4. $\frac{3}{12}$ | 5,2273 |
| 18 | 2. 4. $\frac{8}{12}$ | 5,1513 |
| 24 | 2. 2. $\frac{3}{12}$ | 5,6256 |

Ayant établi les digues, l'une après l'autre, j'ai eu les résultats suivans.

| Expériences | *D* ou hauteur de la digue au-dessus du fond où elle était établie | *b* ou hauteur de la surface du regonflement par rapport au sommet de la digue, prise à 3 pieds à l'amont de la digue | *E* ou étendue du remou — à la paroi à droite du courant | *E* ou étendue du remou — au fil de l'eau | *E* ou étendue du remou — à la paroi à gauche du courant | Longueur de l'horizontale tirée par le point le plus élevé du regonflement, comptée depuis la digue jusqu'à la rencontre de la surface du courant à l'amont de la digue |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *pouc. lign.* | *pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* |
| 1.ère | 5. 0. $\frac{3}{12}$ | 5. 0. $\frac{11}{12}$ | 11. 9. 0 | 11. 4. 0 | 11. 10. 6 | 22. 8. 0 |
| 2.e | 5. 11. $\frac{3}{12}$ | 5. 2. 0 | 13. 11. 0 | 13. 8. 0 | 14. 0. 9 | 25. 2. 0 |
| 3.e | 6. 11. $\frac{10}{12}$ | 5. 3. $\frac{5}{12}$ | 16. 4. 3 | 16. 1. 0 | 16. 6. 0 | 27. 9. 0 |
| 4.e | 7. 11. $\frac{3}{12}$ | 5. 3. $\frac{8}{12}$ | 18. 6. 0 | 18. 1. 0 | 18. 7. 6 | 29. 11. 0 |
| 5.e | 8. 11. $\frac{3}{12}$ | 5. 3. $\frac{3}{12}$ | 20. 7. 0 | 20. 4. 0 | 20. 7. 0 | 31. 8. 0 |

Pendant que la digue de la 5.e expérience était établie, et que le remou s'était invariablement fixé à la distance notée dans le tableau, j'ai pris la hauteur de l'eau dans la section à 21 pieds à l'amont de la digue, et j'ai trouvé pour cette hauteur, 2.*pouc.* 4.*lign.* $\frac{9}{12}$. Ayant ôté la digue, et donné au remou le temps de disparaître, la dépense du canal restant la

même, j'ai retrouvé la même hauteur dans la section précédente du canal.

III. TABLEAU.

10. Canal n.° 1. Dépense constante du canal dans une seconde, $p$=1,3626 pied. cub. Avant d'établir les digues, j'ai pris la hauteur de l'eau dans diverses sections, et j'ai obtenu e qui suit.

| Distances des sections dont on a pris la hauteur, comptée depuis l'endroit où l'on établissait les digues, et à l'amont de cet endroit. | $h$ ou hauteur de l'eau dans chaque section. | $v$ ou vitesse moyenne conclue de la section et de la dépense du canal. |
|---|---|---|
| *pieds* | *pouc. lign.* | *pieds* |
| 6 | 2. 10. $\frac{2}{12}$ | 5,7429 |
| 12 | 2. 8. $\frac{11}{12}$ | 5,9609 |
| 24 | 2. 7. $\frac{11}{12}$ | 6,1477 |

Ayant établi les digues, l'une après l'autre, j'ai eu les résultats suivans.

| Expériences | *D* ou hauteur de la digue au-dessus du fond où elle était établie | *b* ou hauteur de la surface du regonflement par rapport au sommet de la digue, prise a 3 pieds à l'amont de la digue | *E* ou étendue du remou: à la paroi à droite du courant | au fil de l'eau | à la paroi à gauche du courant | Longueur de l'horizontale tirée par le point le plus élevé du regonflement, comptée depuis la digue jusqu'a la rencontre de la surface du courant, à l'amont de la digue |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *pouc. lign.* | *pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* |
| 1.ère | 4. 11. $\frac{8}{12}$ | 6. 2. $\frac{9}{12}$ | 10. 5. 7 | 10. 4. 0 | 10. 7. 3 | 24. 4. 0 |
| 2.e | 5. 11. $\frac{4}{12}$ | 6. 2. $\frac{4}{12}$ | 12. 7. 7 | 12. 7. 1 | 12. 9. 4 | 26. 6. 0 |
| 3.e | 6. 11. $\frac{1}{12}$ | 6. 2. 0 | 14. 8. 4 | 14. 5. 8 | 14. 11. 2 | 28. 8. 0 |

Pendant que la digue de la 3.e expérience était établie, et que le remou s'était fixé invariablement à la distance notée dans le tableau, j'ai pris la hauteur de la section à 15 pieds à l'amont de la digue, et j'ai trouvé pour cette hauteur, 2.*pouc.* 9.*lign.* J'ai retrouvé cette même hauteur dans la même section, après avoir ôté la digue, et donné au remou le temps de disparaître entièrement.

### IV. TABLEAU.

11. Canal n.° 2. Largeur constante du canal, $a=12$ pouces.

Dépense constante du canal, dans une seconde, $p=0{,}6007$ *pied. cub.* Avant d'établir les digues, j'ai pris la hauteur de l'eau dans diverses sections, et j'ai obtenu ce qui suit.

| Distances des sections dont on a pris la hauteur, comptées depuis l'endroit où l'on établissait les digues, et à l'amont de cet endroit. | *h* ou hauteur de l'eau dans chaque section. | *v* ou vitesse moyenne conclue de la section et de la dépense du canal. |
|---|---|---|
| *pieds* | *pouc. lign.* | *pieds* |
| 6 | 1. 8. $\frac{4}{12}$ | 4,2541 |
| 12 | 1. 8. $\frac{1}{12}$ | 4,3071 |
| 18 | 1. 5. $\frac{11}{12}$ | 4,8280 |

Ayant établi les digues, l'une après l'autre, j'ai eu les résultats suivans.

| Expériences | *D* ou hauteur de la digue au-dessus du fond où elle était établie | *b* ou hauteur de la surface du regonflement par rapport au sommet de la digue, prise à 10 pouces à l'amont de la digue | *E* ou étendue du remou: à la paroi à droite du courant | *E*: au fil de l'eau | *E*: à la paroi à gauche du courant | Longueur de l'horizontale tirée par le point le plus élevé du regonflement, comptée depuis la digue jusqu'à la rencontre de la surface du courant à l'amont de la digue |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *pouc. lign.* | *pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* |
| 1.ère | 7. 2. 0 | 3. 2. $\frac{2}{12}$ | 8. 7. 0 | 7. 11. 3 | 8. 5. 2 | 11. 9. 0 |
| 2.e | 8. 0. $\frac{8}{12}$ | 3. 2. $\frac{5}{12}$ | 9. 3. 7 | 9. 0. 6 | 9. 9. 3 | 13. 0. 0 |
| 3.e | 8. 11. $\frac{6}{12}$ | 3. 5. $\frac{7}{12}$ | 10. 11. 9 | 10. 3. 6 | 10. 10. 1 | 14. 7. 0 |
| 4.e | 9. 11. $\frac{7}{12}$ | 3. 6. $\frac{8}{12}$ | 12. 7. 0 | 11. 10. 0 | 12. 2. 6 | 16. 2. 0 |

Pendant que le remou occasioné par la digue de la 1.ère expérience était invariablement établi, j'ai pris la hauteur de la section à 9 pieds à l'amont de la digue, et je l'ai trouvée de 1.pouc. 8.lign. Ayant ensuite ôté la digue, et donné au remou le temps de disparaître, j'ai retrouvé la même hauteur dans la section dont il s'agit.

12. Par la simple inspection de ces tableaux, et des profils des canaux dans lesquels ces expériences ont été faites, on voit:

1.° Que le remou s'est toujours tenu plus bas, que le point où l'horizontale, tirée par l'endroit le plus élevé de la surface du regonflement, allait rencontrer la surface du courant, à l'amont de la digue.

2.° Par les trois premiers tableaux relatifs au canal n.° 1, on voit qu'à mesure que la hauteur de la section et la vitesse moyenne du courant augmentaient, l'étendue du remou, pour une même digue, diminuait: c'est ce que l'on peut observer plus aisément par la table suivante, qui contient les trois premières expériences de chacun des trois premiers tableaux, avec la dépense correspondante du canal, la vitesse moyenne du courant, la hauteur des digues, et l'étendue du remou au fil de l'eau.

| TABLEAUX | Expériences | Hauteur des digues au-dessus du fond où elles étaient établies. | Dépense constante du canal. | Hauteur de la section à l'origine du remou, au fil de l'eau. | Vitesse moyenne du courant dans la section à l'origine du remou au fil de l'eau. | Etendue du remou au fil de l'eau. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *pouc. lign.* | *pieds cub.* | *pouc. lign.* | *pieds* | *pieds pouc. lign.* |
| I. | 1.ère | 4. 11. $\frac{5}{12}$ | 0,6060 | 1. 8. $\frac{10}{12}$ | 4,1887 | 13. 4. 0 |
| II. | 1.ère | 5. 0. $\frac{3}{12}$ | 1,0255 | 2. 4. $\frac{2}{12}$ | 5,2428 | 11. 4. 0 |
| III. | 1.ère | 4. 11. $\frac{8}{12}$ | 1,3626 | 2. 9. $\frac{3}{12}$ | 5,9012 | 10. 4. 0 |
| I. | 2.e | 5. 10. $\frac{10}{12}$ | 0,6060 | 1. 8. $\frac{2}{12}$ | 4,1720 | 15. 0. 0 |
| II. | 2.e | 5. 11. $\frac{3}{12}$ | 1,0255 | 2. 4. $\frac{4}{12}$ | 5,2120 | 13. 8. 0 |
| III. | 2.e | 5. 11. $\frac{4}{12}$ | 1,3626 | 2. 8. $\frac{11}{12}$ | 5,9609 | 12. 7. 1 |
| I. | 3.e | 6. 11. $\frac{2}{12}$ | 0,6060 | 1. 9. $\frac{1}{12}$ | 4,1390 | 17. 6. 8 |
| II. | 3.e | 6. 11. $\frac{10}{12}$ | 1,0255 | 2. 4. $\frac{6}{12}$ | 5,1815 | 16. 1. 0 |
| III. | 3.e | 6. 11. $\frac{1}{12}$ | 1,3626 | 2. 8. $\frac{9}{12}$ | 5,9913 | 14. 5. 8 |

Les digues portées dans cette table ont, trois à trois, la même hauteur, à quelques douzièmes de ligne près : et l'on voit que l'étendue du remou, pour une même digue, est moindre à mesure que la hauteur de la section, et la vitesse moyenne du courant sont plus grandes.

3.° L'étendue du remou est moindre au fil de l'eau, que près les parois du canal.

4.° On voit par les expériences rapportées à la suite de chaque tableau, que les sections du courant prises à peu de distance et à l'amont de l'origine du remou, ne souffrent aucune altération sensible, et conservent les mêmes hauteurs qu'elles ont, lorsque la digue n'existe pas, et que le cours de l'eau dans le canal est tout-à-fait libre.

5.° Enfin dans ces expériences la surface de l'eau, sur toute la longueur du regonflement, a toujours été convexe par rapport à l'observateur; cette convexité, très-légère dans la partie intermédiaire de cette longueur, augmentait rapidement près de deux extrémités du regonflement, où elle devenait très-considerable. Le raccordement de la surface naturelle du courant, au fil de l'eau, avec la surface convexe à l'origine du regonflement, se faisait sur une longueur insensible, de sorte que l'origine du regonflement, au fil de l'eau, était à l'endroit très-apparent et très-marqué, où la surface convexe s'élevait subitement et comme par ressaut, au-dessus de la surface naturelle du courant.

## §. III.

### *Recherche d'une formule propre pour satisfaire aux expériences précédentes.*

13. Les faits précédents sont certains, étant donnés immédiatement par l'expérience, et il serait intéressant d'en connaître

la loi, et de pouvoir la représenter par les circonstances qui concourent à les produire. Mais il paraît très-difficile, au moins d'après les seules expériences qui précédent, de pouvoir établir sur cet objet quelque chose de précis et de satisfaisant. Toutefois je présenterai ici quelques vues, qui pourront, ce me semble, conduire à une première approximation de ces loix.

Pour cela considérons la figure 5.$^e$ qui représente ce qui a lieu relativement au remou, dans le cas dont il s'agit. *KN* est le fond du canal, et *CV* la surface du courant que nous supposerons parallèle au fond, lorsque le canal est libre. *MN* est la hauteur verticale de la digue au-dessus du fond où elle est établie. *BRPO* est la surface de l'eau dans la longueur du regonflement. *B* est l'origine de ce regonflement, de sorte que l'étendue du remou, où la longueur du regonflement est égale à l'horizontale *AD*, tirée par l'endroit le plus élevé de la surface du regonflement et prolongée de part et d'autre jusqu'aux points *A* et *D*, dont le premier correspond au sommet *M* de la digue, et l'autre au point *B*, origine du regonflement.

Le point *B*, où les eaux se gonflent subitement, était, dans les expériences précédentes, ainsi qu'on l'a dit plus haut, très-marqué et très-visible, et la moindre valeur de la hauteur *BD*, a été d'environ trois pouces, et la plus grande a été de près de six pouces.

Maintenant les choses étant dans cet état, il est clair que le courant *CB* soutient à l'endroit *B*, le regonflement de l'eau

occasioné par la digue, et il se met continuellement en équilibre avec l'effort, que les eaux de ce regonflement font pour se répandre dans l'espace *RBCR*.

On voit d'après cela que si l'on connaissait la hauteur *BD* du regonflement, on aurait tout ce qui est relatif au problème dont il s'agit. Car d'après la pente et la dépense du canal, et d'après la position et la hauteur de la digue au-dessus du fond, on trouverait facilement la distance du point *B* ou *D* à la digue, c'est-à-dire l'étendue *AD* du remou.

14. Il est facile de voir que les élémens que l'on doit principalement considérer dans cette recherche, sont la vitesse et la direction du courant: mais pour connaître de quelle manière on doit les combiner, il est essentiel de faire quelques observations, pour concevoir comment l'eau *BRP* est soutenue par la force du courant, qui l'empêche de se répandre dans l'espace *RBCR*.

Il est clair que cet équilibre est impossible, et que la surface *BR* ne peut conserver cette position, sans que sur chaque point de cette surface il ne s'exerce continuellement une pression qui puisse contrebalancer l'effort de la gravité, en vertu de laquelle le liquide se répandrait dans l'espace *RBCR*.

Or la pression dont il s'agit, ne peut être produite et maintenue que par le courant lui-même. Il faut donc pour cela qu'à l'endroit *B* et à la rencontre de l'eau refoulée par la digue, les molécules de l'eau affluente abandonnent leurs directions primitives et en prennent d'autres telles que *BR*, *br*, et qu'il s'établisse ainsi un nouveau courant le long de la

surface même *BR*. On voit par-là comment le liquide peut prendre et conserver la figure *BR*.

L'existence des courans *BR*, *br*, est prouvée d'ailleurs par le fait. Car la surface *BR* se présente avec des tournoiemens plus ou moins considérables, produits par l'irrégularité du mouvement des particules d'eau, et par l'air qui s'insinue dans les vides que ces particules laissent entr'elles. L'eau ainsi éparpillée se détache de la surface *BR* et retombe; mais dès qu'elle touche les filets du courant *BR*, *br*, elle est de nouveau entrainée en haut le long de *BR*, et ce phénomène se renouvelle sans cesse par l'irrégularité du mouvement qui a lieu sur la surface *BR*. Ces tournoiemens finissent par s'établir d'une manière permanente sur cette surface, sur laquelle ils se forment et se reproduisent, et le long de laquelle ils sont continuellement entrainés.

15. D'après cela il résulte que le courant lorsqu'il arrive en *BF*, produit des phénomènes semblables à ceux qui ont lieu, lorsqu'il rencontre des obstacles quelconques qui s'opposent à sa direction. Si l'obstacle était fixe et donné de position et de figure, on aurait le cas du choc de l'eau contre une surface immobile. Mais dans le cas actuel, l'obstacle dont il s'agit, est l'eau refoulée elle-même, qui est par conséquent susceptible de mouvement, et toujours plus ou moins agitée et ondoyante; et la surface qui reçoit le choc, est tout-à-fait inconnue quant à sa forme et à sa position. Ainsi on ne voit pas comment on puisse parvenir à déterminer la hauteur *BD* de manière qu'elle soit déduite des principes rigoureux du

mouvement des fluides, et qu'en même temps elle satisfasse aux résultats des expériences.

En nous bournant donc à une simple approximation, supposons que dans la section $BF$ du courant on ait établi un plan fixe, égal à cette section. Nommons $v$ la vitesse moyenne du courant, dont nous supposerons que tous les filets sont également animés; et soit $KG = k$, $GF = l$, $BD = H$ et $g = \overset{pieds}{30}, 1958$. Supposons encore que le plan hypothétique $BF$ ne produise d'autre effet que celui de changer la direction de chaque filet au point et à l'instant que celui-ci le frappe, sans en altérer la vitesse, et sans gêner, au-delà de ce point et après cet instant, le mouvement que le filet prendra.

Cela posé il est clair, que la hauteur verticale à laquelle un filet quelconque, en vertu de ce changement de direction, s'élevera au-dessus de l'horizontale tirée par le point où le filet a frappé le plan, sera la même pour tous les filets. Cette hauteur est $\frac{l^2}{k^2 + l^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$; et ce sera la hauteur à laquelle le filet supérieur $CB$, ou la surface du courant s'élevera au-dessus de l'horizontale $BE$.

Si cette hauteur verticale était égale à celle qui a effectivement lieu dans le cas du remou que nous considérons, on aurait $BD = H = \frac{l^2}{k^2 + l^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$.

Telle serait donc l'expression de $H$, si les choses se passaient dans le cas du remou, comme dans le cas du plan fixe, que nous avons supposé.

16. Pour voir jusqu'à quel point l'hypothèse précédente s'éloigne de ce qui a effectivement lieu dans le cas du remou, j'ai formé la table suivante relative aux expériences qui précédent. Les quantités qu'elle comprend, sont données immédiatement par l'expérience, et les lettres qu'on y emploie ont la même signification que celle qu'on leur a attribuée dans les n.os précédens et dans la figure 5.e.

Ainsi $h$ est la hauteur de la section $BF$ du canal prise à l'endroit $B$, où le fil de l'eau du courant frappe l'eau refoulée par la digue. Cette hauteur $h$ est déduite, pour chaque expérience, des hauteurs des sections, qu'on a prises en divers endroits à l'amont de la digue, en supposant que la pente superficielle du courant de l'une de ces sections à la suivante, soit uniforme. Ainsi, par exemple, dans la 1.ère expérience du 1.er tableau (n.° 8) l'étendue du remou au fil de l'eau est de 13.pieds 4.pouc.; partant la hauteur de la section en cet endroit était comprise entre 1.pouc. 8.lign. $\frac{9}{12}$ et 1.pouc. 9.lign. $\frac{1}{12}$ qui sont les hauteurs des sections à 12 pieds et à 18 pieds à l'amont de la digue (I. Tableau). De là, par une simple regle de proportion, on trouve que la hauteur de la section dont il s'agit, était de 1.pouc. 8.lign. $\frac{10}{12}$.

$v$ est la vitesse moyenne de la section $BF$, déduite de la dépense du canal et de la grandeur connue de la section $BF$.

Le rapport $\frac{l}{\sqrt{k^2 + l^2}}$ est déduit de la pente superficielle du courant dans la partie du canal où se trouve la section $BF$. Le profil du fond du canal et les hauteurs connues des sections

du courant donnent, pour chaque partie du canal, la valeur de $\frac{l}{\sqrt{k^2+l^2}}$. Cette valeur est relative à la surface du courant, mais elle est, dans les expériences dont il s'agit, sensiblement la même que si elle était relative au fond du canal.

$H$ représente la ligne $BD$, c'est-à-dire la hauteur verticale à laquelle s'établit le point le plus élevé de la surface du regonflement, par rapport au point $B$ de la section $BF$, où commence le même regonflement. On obtient la valeur de $H$, pour chaque expérience, en ajoutant à la hauteur de la digue, la hauteur verticale du point le plus élevé de la surface du regonflement par rapport au sommet de la digue, et en soustrayant de cette somme la hauteur du point $B$ au-dessus de l'horizontale qui passe par le fond à l'endroit où l'on établissait les digues. C'est-à-dire on a

$$BD = H = MN + PQ - BY - YX.$$

Ainsi dans la 1.ère expérience du I. Tableau on a

| | pouc. | lign. |
|---|---|---|
| $MN =$ | 4. | 11. $\frac{5}{12}$ ; |
| $PQ =$ | 3. | 9. $\frac{2}{12}$ ; |
| $BY =$ | 1. | 8. $\frac{10}{12}$ , |

en prenant $BY = h$, ce qui dans nos expériences peut se faire sans aucune erreur sensible.

Le profil du canal n.° 1 donne

| | pouc. | lign. |
|---|---|---|
| $YX =$ | 3. | 11. $\frac{8}{12}$ ; d'où l'on déduit |
| $H =$ | 3. | 0. $\frac{1}{12}$ . |

D'après cela il est facile de former la table suivante.

| TABLEAUX | Expériences | $h$ | $v$ | $\frac{l}{\sqrt{k^2+l^2}}$ | $\frac{l^2}{k^2+l^2}$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *pouc. lign.* | *pieds* | | | *pouc. lign.* |
| I. | 1.ère | 1. 8. $\frac{10}{12}$ | 4,1887 | 0,99933 | 0,99867 | 3. 0. $\frac{1}{12}$ |
| | 2.e | 1. 8. $\frac{11}{12}$ | 4,1720 | 0,99933 | 0,99867 | 3. 2. $\frac{1}{12}$ |
| | 3.e | 1. 9. $\frac{1}{12}$ | 4,1390 | 0,99933 | 0,99867 | 3. 1. $\frac{1}{12}$ |
| | 4.e | 1. 8. $\frac{7}{12}$ | 4,2395 | 0,99951 | 0,99902 | 3. 2. $\frac{4}{12}$ |
| II. | 1.ère | 2. 4. $\frac{2}{12}$ | 5,2428 | 0,99966 | 0,99932 | 4. 6. $\frac{8}{12}$ |
| | 2.e | 2. 4. $\frac{4}{12}$ | 5,2120 | 0,99933 | 0,99867 | 4. 7. $\frac{5}{12}$ |
| | 3.e | 2. 4. $\frac{6}{12}$ | 5,1815 | 0,99933 | 0,99867 | 4. 8. $\frac{8}{12}$ |
| | 4.e | 2. 4. $\frac{8}{12}$ | 5,1513 | 0,99954 | 0,99908 | 4. 10. $\frac{1}{12}$ |
| | 5.e | 2. 3. $\frac{9}{12}$ | 5,3215 | 0,99954 | 0,99908 | 4. 11. $\frac{8}{12}$ |
| III. | 1.ère | 2. 9. $\frac{3}{12}$ | 5,9012 | 0,99971 | 0,99942 | 5. 6. $\frac{7}{12}$ |
| | 2.e | 2. 8. $\frac{11}{12}$ | 5,9609 | 0,99937 | 0,99875 | 5. 9. 0 |
| | 3.e | 2. 8. $\frac{9}{12}$ | 5,9913 | 0,99937 | 0,99875 | 5. 10. $\frac{7}{12}$ |
| IV. | 1.ère | 1. 8. $\frac{3}{12}$ | 4,2716 | 0,99811 | 0,99623 | 2. 9. $\frac{6}{12}$ |
| | 2.e | 1. 8. $\frac{2}{12}$ | 4,2893 | 0,99811 | 0,99623 | 2. 10. $\frac{8}{12}$ |
| | 3.e | 1. 8. $\frac{2}{12}$ | 4,2893 | 0,99811 | 0,99623 | 3. 1. $\frac{7}{12}$ |
| | 4.e | 1. 8. $\frac{1}{12}$ | 4,3071 | 0,99811 | 0,99623 | 3. 1. $\frac{1}{12}$ |

17. Formons maintenant les valeurs de $\frac{l^2}{k^2+l^2}\cdot\frac{v^2}{2g}$, et comparons-les avec les hauteurs observées $H$, nous aurons la table suivante.

| TABLEAUX | Expériences | $\frac{l^2}{k^2+l^2}\cdot\frac{v^2}{2g}$ | $H$ | Différences |
|---|---|---|---|---|
| | | pouc. lign. | pouc. lign. | pouc. lign. |
| I. | 1.ère | 3. 5. $\frac{9}{12}$ | 3. 0. $\frac{1}{12}$ | 0. 5. $\frac{8}{12}$ |
| | 2.e | 3. 5. $\frac{5}{12}$ | 3. 2. $\frac{1}{12}$ | 0. 3. $\frac{4}{12}$ |
| | 3.e | 3. 4. $\frac{10}{12}$ | 3. 1. $\frac{11}{12}$ | 0. 2. $\frac{11}{12}$ |
| | 4.e | 3. 6. $\frac{10}{12}$ | 3. 2. $\frac{4}{12}$ | 0. 4. $\frac{6}{12}$ |
| II. | 1.ère | 5. 5. $\frac{6}{12}$ | 4. 6. $\frac{8}{12}$ | 0. 10. $\frac{10}{12}$ |
| | 2.e | 5. 4. $\frac{8}{12}$ | 4. 7. $\frac{5}{12}$ | 0. 9. $\frac{3}{12}$ |
| | 3.e | 5. 3. $\frac{11}{12}$ | 4. 8. $\frac{8}{12}$ | 0. 7. $\frac{3}{12}$ |
| | 4.e | 5. 3. $\frac{3}{12}$ | 4. 10. $\frac{1}{12}$ | 0. 5. $\frac{2}{12}$ |
| | 5.e | 5. 7. $\frac{6}{12}$ | 4. 11. $\frac{8}{12}$ | 0. 7. $\frac{10}{12}$ |
| III. | 1.ère | 6. 11. 0 | 5. 6. $\frac{7}{12}$ | 1. 4. $\frac{5}{12}$ |
| | 2.e | 7. 0. $\frac{7}{12}$ | 5. 9. 0 | 1. 3. $\frac{7}{12}$ |
| | 3.e | 7. 1. $\frac{6}{12}$ | 5. 10. $\frac{7}{12}$ | 1. 2. $\frac{11}{12}$ |
| IV. | 1.ère | 3. 7. $\frac{4}{12}$ | 2. 9. $\frac{6}{12}$ | 0. 9. $\frac{10}{12}$ |
| | 2.e | 3. 7. $\frac{8}{12}$ | 2. 10. $\frac{8}{12}$ | 0. 9. 0 |
| | 3.e | 3. 7. $\frac{8}{12}$ | 3. 1. $\frac{7}{12}$ | 0. 6. $\frac{1}{12}$ |
| | 4.e | 3. 8. $\frac{1}{12}$ | 3. 1. $\frac{1}{12}$ | 0. 7. 0 |

On voit par cette table, que l'on a toujours, dans ces expériences $\frac{l^2}{k^2+l^2} \cdot \frac{v^2}{2g} > H$. La plus grande différence entre la valeur de cette formule, et la valeur de $H$ donnée par l'expérience, est celle qui est relative à la 1.ère expérience du IV Tableau, où cette différence est de 0,2269 en prenant pour unité la valeur correspondante de $\frac{l^2}{k^2+l^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$.

On pourrait apporter une première correction à cette formule, en faisant partir l'horizontale $BE$, à laquelle se rapporte la hauteur verticale $\frac{l^2}{k^2+l^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$, d'un autre point sur $BF$ plus bas que le point $B$, ainsi que cela parait conforme à la circonstance de considérer le choc du courant comme dû à sa vitesse moyenne, qui dans un canal se trouve, en général, à quelque profondeur de la surface du courant. Mais ce moyen ne conduirait, dans nos expériences, à rien de déterminé et de constant: ainsi nous croyons préférable de corriger la formule précédente d'une autre manière, que nous allons exposer.

18. La quantité $\frac{l^2}{k^2+l^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ exprime la hauteur verticale où monterait le liquide au moment du choc, en supposant, entr'autres conditions, que l'eau refoulée par la digue n'a point de vitesse, et que par conséquent le choc se fait avec toute la vitesse $v$. Mais dans le cas des expériences dont il s'agit, le prisme de l'eau refoulée au-devant de la digue

a une vitesse propre, et telle qu'il se renouvelle sans cesse, en conservant toujours la même figure et le même volume. Le choc du courant n'est donc pas dû à la vitesse entière $v$, mais à la différence des deux vitesses. Soit $nv$ la vitesse du prisme à l'instant du choc; il est clair qu'au lieu de $v$ il faudra mettre $(1-n)v$ dans la formule précédente, qui deviendra $\frac{(1-n)^2 \cdot l^2}{k^2+l^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$.

Il reste à déterminer $n$ ou la vitesse qu'a le prisme d'eau dans le sens du courant, au moment du choc. Si l'on connaissait la loi avec laquelle les hauteurs vives des sections du prisme varient depuis la section $BY$ jusqu'à la section $OM$, on aurait la valeur de $n$ pour chaque section verticale et latitudinale du prisme. Mais cette loi étant inconnue, on ne voit pas comment on puisse déterminer la valeur de $n$. Il faut donc encore ici se borner à essayer pour $n$ une formule dont la loi soit simple, et qui satisfasse, autant qu'il est possible, aux résultats de l'observation.

Or on satisfait assez bien aux expériences précédentes, en prenant pour $n$, dans chaque expérience, le rapport de la dépense du canal à la somme de cette même dépense et du volume du prisme de l'eau refoulée par la digue. Sans m'arrêter à faire des reflexions sur la signification de cette valeur, et sur les conséquences qu'on en pourrait tirer, et en attendant que la théorie ou de nouvelles expériences déterminent la veritable valeur du coëfficient $n$, j'adopterai celle que je viens d'annoncer.

Soit donc $p$ la dépense du canal ou le volume de l'eau affluente dans chaque expérience, et $q$ le volume du prisme de l'eau refoulée par la digue, dans la même expérience, on aura

$$n=\frac{p}{p+q}\,;\ 1-n=\frac{q}{p+q}\,;$$

et la formule

$$(1-n)^2.\frac{l^2}{k^2+l^2}\cdot\frac{v^2}{2g}$$

deviendra

$$\left(\frac{q}{p+q}\right)^2\cdot\frac{l^2}{k^2+l^2}\cdot\frac{v^2}{2g}\,.$$

Dans chaque expérience on a la valeur de $p$ et de $q$; ainsi l'on peut former celles de $n$ et de $1-n$, et enfin celle de la formule précédente. D'après cela on aura la table qui suit, où $k$, $l$, $v$ et $H$ ont les valeurs données dans les tables précédentes. On obtient la valeur de $q$, dans chaque expérience, en cherchant le volume du prisme connu d'eau $NADY$, $AD$ étant l'étendue du remou au fil de l'eau, et l'épaisseur de ce prisme étant égale à la largeur du canal.

| Tableaux | $p$ | Expériences | $q$ | $n$ ou $\frac{p}{p+q}$ | $(1-n)^2$ ou $\left(\frac{q}{p+q}\right)^2$ | $\left(\frac{q}{p+q}\right)^2 \cdot \frac{l^2}{k^2+l^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ | $H$ | Différences | Différences en parties de $H$ prise pour unité. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | pied. cub. | | pied. cub. | | | pied. pouc. lign. | pouc. lign. | pouc. lign. | |
| I. | 0,6060 | 1.ère | 7,4780 | 0,0750 | 0,8556 | 0,24824 = 2. 11. $\frac{9}{12}$ | 3. 0. $\frac{1}{12}$ | +0. 0. $\frac{4}{12}$ | +0,0092 |
| | | 2.e | 9,0799 | 0,0626 | 0,8787 | 0,25292 = 3. 0. $\frac{5}{12}$ | 3. 2. $\frac{1}{12}$ | +0. 1. $\frac{8}{12}$ | +0,0438 |
| | | 3.e | 11,4398 | 0,0503 | 0,9019 | 0,25550 = 3. 0. $\frac{10}{12}$ | 3. 1. $\frac{11}{12}$ | +0. 1. $\frac{1}{12}$ | +0,0286 |
| | | 4.e | 13,9543 | 0,0416 | 0,9185 | 0,27309 = 3. 3. $\frac{4}{12}$ | 3. 2. $\frac{4}{12}$ | −0. 1. 0 | −0,0261 |
| II. | 1,0255 | 1.ère | 8,0278 | 0,1134 | 0,7861 | 0,35755 = 4. 3. $\frac{6}{12}$ | 4. 6. $\frac{8}{12}$ | +0. 3. $\frac{2}{12}$ | +0,0579 |
| | | 2.e | 10,2975 | 0,0906 | 0,8270 | 0,37149 = 4. 5. $\frac{6}{12}$ | 4. 7. $\frac{5}{12}$ | +0. 1. $\frac{11}{12}$ | +0,0346 |
| | | 3.e | 12,9792 | 0,0732 | 0,8590 | 0,38137 = 4. 6. $\frac{11}{12}$ | 4. 8. $\frac{8}{12}$ | +0. 1. $\frac{9}{12}$ | +0,0309 |
| | | 4.e | 15,4523 | 0,0622 | 0,8795 | 0,38610 = 4. 7. $\frac{7}{12}$ | 4. 10. $\frac{1}{12}$ | +0. 2. $\frac{6}{12}$ | +0,0430 |
| | | 5.e | 18,3328 | 0,0530 | 0,8968 | 0,42013 = 5. 0. $\frac{6}{12}$ | 4. 11. $\frac{8}{12}$ | −0. 0. $\frac{10}{12}$ | −0,0140 |
| III. | 1,3626 | 1.ère | 8,4051 | 0,1395 | 0,7405 | 0,42676 = 5. 1. $\frac{5}{12}$ | 5. 6. $\frac{7}{12}$ | +0. 5. $\frac{2}{12}$ | +0,0776 |
| | | 2.e | 10,8235 | 0,1118 | 0,7889 | 0,46358 = 5. 6. $\frac{9}{12}$ | 5. 9. 0 | +0. 2. $\frac{3}{12}$ | +0,0326 |
| | | 3.e | 13,0862 | 0,0943 | 0,8203 | 0,48696 = 5. 10. $\frac{1}{12}$ | 5. 10. $\frac{7}{12}$ | +0. 0. $\frac{6}{12}$ | +0,0071 |
| IV. | 0,6007 | 1.ère | 4,9010 | 0,1092 | 0,7935 | 0,23884 = 2. 10. $\frac{5}{12}$ | 2. 9. $\frac{6}{12}$ | −0. 0. $\frac{11}{12}$ | −0,0274 |
| | | 2.e | 5,8079 | 0,0937 | 0,8214 | 0,24929 = 2. 11. $\frac{11}{12}$ | 2. 10. $\frac{8}{12}$ | −0. 1. $\frac{3}{12}$ | −0,0361 |
| | | 3.e | 7,3912 | 0,0752 | 0,8553 | 0,25958 = 3. 1. $\frac{5}{12}$ | 3. 1. $\frac{7}{12}$ | +0. 0. $\frac{2}{12}$ | +0,0044 |
| | | 4.e | 9,0156 | 0,0625 | 0,8789 | 0,26896 = 3. 2. $\frac{9}{12}$ | 3. 1. $\frac{1}{12}$ | −0. 1. $\frac{8}{12}$ | −0,0449 |

19. Par cette table on voit que les différences entre les résultats de la formule, et les valeurs de $H$ données directement par l'expérience, sont en général assez petites, eu égard à la nature de la recherche dont il s'agit. La plus grande différence est celle qui a lieu pour la 1.ère expérience du III. tableau : elle est d'$\frac{1}{13}$ de la valeur de $H$ donnée par l'expérience.

Je ne chercherai pas d'autres valeurs de $n$ qui satisfassent mieux à ces expériences, car celles-ci sont en trop petit nombre pour qu'on puisse entreprendre avec avantage cette recherche. On ne doit les regarder que comme un simple essai sur un objet très-délicat et très-important de l'hydraulique. J'observerai seulement que si la masse $q$ est très-grande par rapport à la dépense $p$ du canal; ou bien si la disposition de la digue est telle, qu'on puisse regarder la masse $q$ comme immobile, et par conséquent comme très-grande par rapport à $p$, alors la formule $\frac{l^2}{k^2+l^2}\cdot\frac{v^2}{2g}$ donnera à très-peu-près la valeur de $H$. C'est ce qui parait résulter de l'expérience suivante.

20. Dans le canal n.° 1. pendant que la dépense constante de ce canal était de 1,3626 pied. cub., j'ai fait établir la digue $MN$ (fig. 6.e et 7.e) qui forçait l'eau à passer par l'ouverture $NO$ qu'on avait laissée entre le bord inférieur de la digue et le fond du canal, la largeur de cette ouverture étant égale à celle du canal : le regonflement de l'eau ayant eu lieu à l'amont

de la digue, et le remou s'étant établi d'une manière permanente, j'ai pris les mesures qui suivent.

| Canal N.° 1 — $p$ ou dépense du canal. | Hauteur de l'orifice *NO* au-dessous de la digue. | Charge d'eau ou valeur de *NP* | Étendue du remou | | | Longueur de l'horizontale tirée par le niveau de la charge d'eau, comptée depuis la digue jusqu'à la rencontre de la surface du courant, à l'amont de la digue |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | à la paroi à droite du courant | au fil de l'eau | à la paroi à gauche du courant | |
| *pied. cub.* | *pouc. lign.* | | *pieds. pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* | *pieds pouc. lign.* |
| 1,3626 | 3. 6 | de 10 *pouc.* | 15. 8. 3 | 15. 3. 9 | 15. 9. 0 | 29. 7. 0 |
| | | à 11 *pouc.* | | | | 31. 5. 0 |

L'eau contre la digue n'était pas tranquille: elle avait un balancement constant d'un pouce, de sorte que la moindre charge d'eau était de 10 pouces et la plus grande s'élevait à 11 pouces. En observant maintenant que les hauteurs des sections à l'amont de la digue, et avant qu'elle fut établie, sont les mêmes que celles rapportées dans le III tableau au n.° 10 de ce mémoire, il sera facile de former, par la méthode indiquée au n.os 16 et 17, les valeurs suivantes

| $h$ | $v$ | $\frac{l^2}{k^2+l^2}$ | $H$ | $\frac{l^2}{k^2+l^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ |
|---|---|---|---|---|
| *pouc. lign.* | *pieds.* | | *pouc. lign.* | *pieds. pouc. lign.* |
| 2. 8. $\frac{8}{12}$ | 6,0066 | 0,99875 | 5. 11. $\frac{4}{12}$ | 0,59667 = 7. 1. $\frac{11}{12}$ |
| | | | 6. 11. $\frac{4}{12}$ | |

d'où l'on voit que la formule $\frac{l^2}{k^2+l^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ donne, à deux lignes près, la valeur de $H$ telle qu'elle a été observée au moment de la plus grande charge d'eau, c'est-à-dire au moment où le prisme d'eau au-devant de la digue est comme immobile dans le sens du courant, et peut par conséquent être regardé comme doué d'une masse infinie.

On a aussi, dans la même expérience, les valeurs suivantes:

| $p$ | $q$ (Calculé à 10 pouces de charge d'eau). | $\frac{p}{p+q}$ | $\left(\frac{q}{p+q}\right)^2$ | $\left(\frac{q}{p+q}\right)^2 \cdot \frac{l^2}{k^2+l^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ |
|---|---|---|---|---|
| *pieds. cub.* | *pieds. cub.* | | | *pieds. pouc. lign.* |
| 1,3626 | 14,3895 | 0,0865 | 0,8345 | 0,49792 = 5. 11. $\frac{8}{12}$ |

Le volume $q$ a été calculé en prenant la moindre charge d'eau, c'est-à-dire 10$^{pouces}$, et la moindre valeur de $H$, c'est-à-dire 5.$^{pouc.}$ 11.$^{lign.}$ $\frac{4}{12}$. On voit que la formule . . . . . .

$\left(\frac{q}{p+q}\right)^2 \cdot \frac{l^2}{k^2+l^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ donne à un tiers de ligne près, la valeur de $H$ observée au moment de la moindre charge d'eau, c'est-à-dire quand l'eau refoulée par la digue recommençait à s'élever au-devant de la digue, et avait par conséquent, à l'origine du remou, une vitesse dans le sens du courant.

## §. IV.

### *Équations relatives au remou occasioné par une digue donnée.*

21. Si l'on veut se servir de la formule $\left(\frac{q}{p+q}\right)^2 \cdot \frac{l^2}{k^2+l^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ pour connaître, au moins approximativement, la valeur de $H$, et l'étendue du remou, dans un cas donné, on formera les équations suivantes. Soit ( fig. 5.e )

$MN = D =$ à la hauteur de la digue ;

$PQ = b = AM$ ; $BF = h$ ;

$KG = k$ ; $GF = l$ ;

$AD = E =$ à l'étendue du remou, prise au fil de l'eau ;

$BD = H =$ à la hauteur du regonflement au-dessus de l'horizontale $BE$ qui passe par le point $B$, origine du remou ;

$v$ la vitesse moyenne du courant ;

$a$ la largeur constante du canal, supposé rectangulaire : cette largeur est aussi égale à celle de la section du courant au-dessus de la digue.

$p = ahv$, la dépense du canal.

$q$ le volume du prisme d'eau $NADY$;

$\varphi$ l'angle $FKG$, d'où

$$\sin.\varphi = \frac{l}{\sqrt{k^2+l^2}}\,;\ \cos.\varphi = \frac{k}{\sqrt{k^2+l^2}}\,;$$

et supposons, pour plus de simplicité, que la pente du canal soit uniforme, et que la surface du courant soit parallèle au fond du canal.

Pour prévenir toute équivoque relativement à la signification et à l'emploi de la quantité $H$, nous remarquerons qu'elle représente la hauteur du regonflement au-dessus de la surface naturelle du courant, en prenant cette surface au point $B$, au fil de l'eau, point que nous désignons sous le nom d'origine du remou. C'est toujours cette hauteur, que nous entendrons dans la suite par les expressions hauteur du regonflement, ou hauteur du regonflement par rapport à la surface naturelle du courant. On voit que cette hauteur deviendrait nulle, si le remou s'étendait jusqu'au point $C$, où serait alors son origine; tandis que pour les autres points compris entre $C$ et $A$, la véritable hauteur du regonflement par rapport à la surface naturelle $CL$ du courant, serait variable, et dépendrait de la position du point que l'on considère, et du profil du canal.

Cela posé, on aura

$$BY = LN = \frac{h}{\sin.\varphi};$$

$$AL = D + b - \frac{h}{\sin.\varphi};$$

$$AC = \left(D + b - \frac{h}{\sin.\varphi}\right).\tang.\varphi;$$

$$CD = H.\tang.\varphi$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad E = \left(D + b - H - \frac{h}{\sin.\varphi}\right).\tang.\varphi.$$

Cette équation donnera l'étendue $E$ du remou, lorsqu'on connaîtra $b$ et $H$.

Pour la valeur de $q$ on a

$$q = a.\frac{AD}{2}.\left(AN + DY\right), \text{ ou bien}$$

$$q = \frac{a}{2}.\left[D + b + H + \frac{h}{\sin.\varphi}\right]\left[D + b - H - \frac{h}{\sin.\varphi}\right].\tang.\varphi\ldots$$

Lorsque $D = 0$, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de digue, cette équation donne $q = 0$, car dans ce cas on a visiblement

$$H = 0, \text{ et } b = LN = BY = \frac{h}{\sin.\varphi}.$$

Faisons pour abréger,

$$D + \frac{h}{\sin.\varphi} = R;$$

$$D - \frac{h}{\sin.\varphi} = S;$$

l'équation

$$H=\left(\frac{q}{p+q}\right)^2\cdot\frac{v^2\sin^2.\varphi}{2g}$$

deviendra

$$(2)\quad H=\left(\frac{\frac{1}{2}(R+b+H)(S+b-H).\text{tang}.\varphi}{hv+\frac{1}{2}(R+b+H)(S+b-H).\text{tang}.\varphi}\right)^2\cdot\frac{v^2\sin^2.\varphi}{2g}.$$

En connaissant la valeur de $b$, cette équation donnera celle de $H$. Si l'eau au-devant de la digue n'avait pas de vitesse dans le sens horizontal, on aurait, pour déterminer $b$, l'équation

$$\tfrac{2}{3}\,mb\sqrt{2gb}=hv\,;$$

où $m$ est le coëfficient de la contraction de la veine, que l'on suppose connu dans chaque cas particulier. Mais nous avons attribué (n.° 18) au volume $q$ de l'eau refoulée par la digue, la vitesse $\frac{pv.\sin.\varphi}{p+q}$ dans le sens horizontal, nous aurons ainsi cette autre équation

$$(3)\quad \frac{mb\,h\,v^2.\sin.\varphi}{hv+\frac{1}{2}[R+b+H][S+b-H].\text{tang}.\varphi}+\tfrac{2}{3}\,mb\sqrt{2gb}=hv.$$

Les équations (2) et (3) serviront à déterminer $b$ et $H$ et l'équation (1) donnera l'étendue du remou.

Ces équations appartiennent au cas, où la hauteur $D$ de la digue est égale à la hauteur verticale de l'eau dans le canal à l'aval de la digue, ou plus grande que cette hauteur, de sorte que l'eau qui passe sur la digue, tombe librement, et ne souffre aucun retard par celle qui la précéde.

Si la hauteur de la digue est moindre que la hauteur verticale du courant à l'aval de la digue, nommons $r$ cette

hauteur du courant, $D+b-r$ sera la hauteur de la partie libre de la section du courant au-dessus de la digue, et $r-D$ la hauteur de l'autre partie de la même section : partant au lieu de l'équation (3), on aura la suivante

$$(4)\ \frac{m b h v^2 . \sin . \varphi}{hv+\frac{1}{2}(R+b+H)(S+b-H).\text{tang}.\varphi}+\frac{m}{3}(2b+r-D)\sqrt{2g(D+b-r)}=hv;$$

à laquelle il faut joindre celle-ci

$$(5)\qquad rv' \sin . \varphi = hv.$$

$v'$ étant la vitesse moyenne du courant à l'aval de la digue. Lorsque $D=0$, les équations (4) et (5) sont satisfaites par les valeurs $q=0$, $m=1$, $v'=v$, $r=b=\frac{h}{\sin . \varphi}$, conformément à ce qui doit avoir lieu, par la nature de la question.

Ainsi dans le cas de $D<r$, on doit employer les équations (1), (2) et (4), en supposant que l'on connaisse la hauteur $r$, ou la vitesse $v'$ du courant à l'aval de la digue.

22. Si le canal est horizontal, il est visible qu'en supposant que le remou se soit établi sur une étendue $E$, et en conservant les dénominations précédentes, on aura

$$(1)'\qquad D+b=h+H$$

$$q=aE(h+H)=aE(D+b);$$

et l'équation $H=\left(\frac{q}{p+q}\right)^2 . \frac{v^2}{2g}$

deviendra

$$(2)'\qquad H=\left(\frac{E(h+H)}{hv+E(h+H)}\right)^2 . \frac{v^2}{2g};$$

et au lieu des équations (3), (4) et (5) on aura les suivantes

$$(3)' \quad \frac{mbhv^2}{hv+E(h+H)}+\frac{2}{3}mb\sqrt{2gb}=hv;$$

$$(4)' \quad \frac{mbhv^2}{hv+E(h+H)}+\frac{m}{3}(2b+r-D)\sqrt{2g(D+b-r)}=hv;$$

$$(5)' \quad rv'=hv.$$

Les équations (1)', (2)' et (3)' serviront pour le cas où l'on a $D=r$, ou $D>r$; les équations (1)', (2)', (4)' et (5)' serviront pour le cas où $D<r$.

Il est inutile, pour notre objet de considérer le cas d'un canal dont le fond serait vertical; car ce cas se réduit ou à celui d'un jet vertical qui tombe sur la surface de l'eau contenue dans un vase qui en verse toujours autant qu'il en reçoit; ou à celui du choc d'un jet vertical contre un plan horizontal, le long duquel le jet a la liberté de s'échapper : dans le premier cas il n'y a point de remou dans le courant, à l'amont de son intersection avec la surface de l'eau contenue dans le vase. Dans l'autre cas le jet, à la rencontre du plan, se regonfle sur une petite hauteur, et prend la figure connue d'une veine qui frappe perpendiculairement une plaque.

Enfin si l'on veut considérer le cas où le courant passe par une ouverture entre le fond du canal, et le bord inférieur de la digue, la largeur de l'ouverture étant égale à celle du canal; nommons $D$ la hauteur de la charge d'eau contre la digue, et $b$ la hauteur de l'ouverture, de sorte que $b+D$ soit la hauteur verticale depuis le niveau de l'eau contre la digue, jusqu'au fond du canal; les équations (1) et (2) resteront les mêmes, et l'équation (3) deviendra pour ce cas

$$(3)'' \quad \frac{mbhv^2 . \sin . \varphi}{hv + \frac{1}{2}(R+b+H)(S+b-H) . \text{tang} . \varphi} + \frac{2m}{3}\left[(D+b)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right]\sqrt{2g} = hv\,;$$

où les inconnues sont $D$, $E$ et $H$.

Si la hauteur verticale $r$ du courant à l'aval de la digue est plus grande que la hauteur $b$ de l'ouverture, on aura, au lieu de l'équation précédente, ces deux autres équations;

$$(4)'' \quad \frac{mbv^2 . \sin . \varphi}{hv + \frac{1}{2}[R+b+H][S+b-H] . \text{tang} . \varphi} + mb\sqrt{2g(D+b-r)} = hv\,;$$

$$(5)'' \quad rv' \sin . \varphi = hv\,.$$

Il est facile de former les équations relatives au cas de $r < b$, que nous nous dispenserons d'écrire.

23. L'application des équations des deux n.os précédens à des cas particuliers suppose que l'on connaisse d'avance et d'une manière suffisamment exacte le coëfficient $m$: ce sera pour l'ordinaire assez difficile, car ce coëfficient peut avoir des valeurs très-différentes entr'elles, selon la forme du sommet ou bord supérieur de la digue, et des parois latérales du canal, contigues à la digue. En nous servant de l'équation (3) mise sous cette forme

$$mab\left[\frac{p}{p+q} \cdot \frac{lv}{\sqrt{k^2+l^2}} + \tfrac{2}{3}\sqrt{2gb}\right] = p\,,$$

pour déterminer la valeur qu'avait $m$ dans chacune de nos expériences, nous avons formé la table suivante

| TABLEAUX | Expériences | $m$ |
|---|---|---|
| I. | 1.ère | 0,601 |
| | 2.e | 0,624 |
| | 3.e | 0,619 |
| | 4.e | 0,632 |
| II. | 1.ère | 0,612 |
| | 2.e | 0,614 |
| | 3.e | 0,610 |
| | 4.e | 0,616 |
| | 5.e | 0,629 |
| III. | 1.ère | 0,576 |
| | 2.e | 0,600 |
| | 3.e | 0,620 |
| IV. | 1.ère | 0,723 |
| | 2.e | 0,732 |
| | 3.e | 0,668 |
| | 4.e | 0,675 |

On voit par cette table, que les expériences des trois premiers tableaux, faites dans le canal n.° 1, donnent pour $m$ des valeurs qui ne s'éloignent pas beaucoup entr'elles, et dont la moyenne 0,613 est égale à celle qui a lieu pour les orifices percés en minces parois. Les expériences du IV tableau, faites dans le canal n.° 2, donnent pour la valeur moyenne du même coëfficient, $m = 0,700$; ce qui fait voir que dans ce canal avait lieu une moindre contraction.

Au reste outre que les valeurs précédentes de $m$ sont subordonnées aux hypothèses, sur lesquelles sont fondées les équations (2) et (3), on doit encore noter les circonstances suivantes des canaux, dans lesquels ces expériences ont été faites. Les digues étaient établies dans des rainures pratiquées dans le fond et dans les parois de ces canaux. Ces rainures, larges et profondes un pouce, s'élevaient à toute la hauteur des parois, de sorte que les deux parois entre lesquelles se trouvait la section du courant au-dessus du bord supérieur de la digue, n'étaient pas des plans unis et continus, mais chacune de ces parois était coupée par les rainures dont on vient de parler. Pour le canal n.° 1, ces rainures sont faites dans une pierre de taille, et pour le canal n.° 2 elles sont faites dans les briques mêmes dont on a construit le fond et les parois du canal. Les arêtes de ces rainures sont plus ou moins bien terminées à diverses hauteurs. Ces circonstances peuvent expliquer les variations qu'on remarque dans les valeurs de $m$ rapportées ci-dessus.

## §. V.

*Application des équations précédentes à l'explication des principales circonstances que l'on observe dans le remou.*

24. Il faudrait maintenant resoudre les divers sistêmes d'équations des n.os 21 et 22, pour être à même de connaître et de suivre toutes les circonstances du remou, d'après celles du canal et de la digue, supposées connues. Mais la résolution de ces équations n'étant pas pratiquable, il faut se borner à des réflexions générales, déduites de ces équations et de la nature du phénomène dont il s'agit.

Considérons en premier lieu le cas d'une digue de telle hauteur qu'on puisse regarder $q$ comme très-grand par rapport à $p$ ; les équations (1), (2) et (3) relatives à un canal qui n'est ni horizontal ni vertical, et au cas où la section du courant au-dessus de la digue est parfaitement libre, donneront à très-peu-près

$$H=\frac{v^2 . \sin^2 . \varphi}{2g}\,;\ b=\sqrt[3]{\frac{9h^2}{4m^2} . \frac{v^2}{2g}}\,;$$

$$E=\left[D+\sqrt[3]{\frac{9h^2}{4m^2} . \frac{v^2}{2g}}-\frac{v^2 . \sin^2 . \varphi}{2g}-\frac{h}{\sin . \varphi}\right] . \operatorname{tang} . \varphi .$$

ce sera la valeur de $E$ dans notre hypothèse, et elle sera positive, car lorsque la hauteur $D$ n'est pas nulle, on a toujours $D+b>H+h$, ainsi qu'il est facile de prouver par la nature de la question.

Maintenant les choses étant dans cet état, diminuons par degrés la hauteur $D$ de la digue, toutes les autres circonstances du canal restant les mêmes. Il est clair que la valeur de $E$ diminuera aussi; et comme l'hypothèse de $q$ très-grand par rapport à $p$ finira par ne plus avoir lieu, il faudra, pour obtenir les valeurs successives de $E$, tirer des équations (2) et (3), ou (2) et (4), les valeurs de $H$ et de $b$, et les substituer dans l'équation (1). Continuons à diminuer la hauteur $D$ de la digue, et supposons-la très-petite par rapport à la hauteur $\frac{h}{\sin . \varphi}$ de la section verticale du courant; alors la quantité $b$, sera par l'équation (4), à très-peu-près égale à cette hauteur; la hauteur $H$ du regonflement sera une très-petite quantité, et l'équation (1) donnera pour $E$ une très-petite valeur. Si enfin $D = 0$, on aura $H = 0$, $b = \frac{h}{\sin . \varphi}$ et l'équation (1) donnera $E = 0$.

Ainsi d'après ces résultats et la nature de la question, les valeurs successives de $E$, depuis celle qui a lieu pour une digue très-haute, où $q$ est très-grand par rapport à $p$ jusqu'à celle qui a lieu pour une digue dont la hauteur est nulle, ou très-petite par rapport à la hauteur de la section verticale du courant, diminuent continuellement jusqu'à devenir $E = 0$.

Dans ce qui précède nous avons conservé au canal la même dépense, et ayant diminué par degrés la hauteur de la digue, nous avons vu que l'étendue correspondante $E$ du remou, diminue sans cesse. Considérons maintenant le cas, où la

hauteur de la digue demeurant constante, on augmente successivement la dépense du canal. Mais ici il est essentiel de remarquer, que dans les canaux que nous considérons, il existe entre la dépense, la hauteur de la section, et la vitesse moyenne de l'eau, des rapports tels, que l'une de ces quantités venant à augmenter, les autres augmentent aussi. Ces rapports dont on n'avait entrevu que ceux qui ont lieu dans les cas d'une vitesse très-grande et d'une vitesse très-petite, ainsi que M. Venturoli l'a fait voir dans ses élémens d'Hydraulique, ces rapports, dis-je, sont maintenant assez bien connus par la théorie du mouvement linéaire des fluides, combinée avec la loi de la résistance qu'ils éprouvent de la part du fond et des parois des canaux dans lesquels ils se meuvent.

Cela posé considérons le cas où la hauteur de la digue étant constante, on augmente successivement la dépense du canal, de sorte que la vitesse moyenne et la hauteur de la section du courant viennent aussi à augmenter à la fois. Il est clair que si l'on suppose que la dépense du canal est d'abord telle par rapport à la hauteur de la digue, qu'on puisse regarder $q$ comme très-grand par rapport à $p$, cette circonstance, en augmentant continuellement la dépense, finira par ne plus avoir lieu; et l'étendue $E$, qui avait d'abord la valeur qui convenait au cas de $q$ très-grand par rapport à $p$, diminuera continuellement à mesure qu'on augmentera la dépense $p$, la hauteur de la digue restant toujours la même. On arrivera donc enfin à une dépense telle, que la hauteur

de la digue pourra être regardée comme très-petite par rapport à la hauteur de la section verticale du courant; et alors l'étendue $E$ et la hauteur $H$ du regonflement seront, d'après ce qui précède, très-petites ou nulles. Ce dernier cas que nous venons de considérer, peut avoir lieu pour des digues établies sur le fond et à travers le lit des fleuves; et l'on voit pourquoi à l'occasion des crues et lorsque la hauteur de la section verticale du courant surpasse un certain nombre de fois celle de la digue, la hauteur et l'étendue du regonflement occasioné par la digue sont si peu sensibles, que l'on n'aperçoit, à la surface du courant, presque plus de traces qui indiquent l'existence de la digue sur le fond du fleuve.

25. Considérons à présent le cas d'un canal horizontal, et dans lequel l'eau qui passe sur la digue, soit tout-à-fait libre. Supposons que la hauteur de la digue soit telle, que le remou s'étende indéfiniment sur toute la longueur du canal, et cherchons la hauteur de la digue propre pour occasionner cette étendue infinie du remou. Les équations (1)', (2)' et (3)' donneront dans cette hypothèse,

$$H = \frac{v^2}{2g}\,;\; b = \sqrt[3]{\frac{9h^2}{4m^2}\cdot\frac{v^2}{2g}}\,;$$

$$D = h + \frac{v^2}{2g} - \sqrt[3]{\frac{9h^2}{4m^2}\cdot\frac{v^2}{2g}}\,.$$

Partant dans un canal horizontal lorsque la hauteur de la digue sera égale à cette valeur de $D$, et, à plus forte raison, lorsqu'elle la surpassera, le remou s'étendra indéfiniment sur toute la longueur du canal.

Si la section du courant au-dessus de la digue n'est pas toute libre, il faudra resoudre les équations (1)', (2)' et (4)' pour avoir la hauteur $D$ de la digue qui donne l'étendue $E$ du remou, infinie. Il est facile de s'assûrer que cette hauteur $D$ sera moindre que celle trouvée pour le cas où la section du courant au-dessus de la digue est tout-à-fait libre.

Pour les digues d'une moindre hauteur que celle qu'on vient de déterminer, l'étendue du remou sera finie, et diminuera continuellement par les abbaissemens successifs de la digue, jusqu'à devenir nulle lorsqu'il n'y aura plus de digue.

26. Les réflexions que nous venons de faire sur les variations de l'étendue $E$ du remou d'après celles de la hauteur de la digue, dépendent visiblement des valeurs que prend le facteur $\left(\frac{q}{p+q}\right)^2$, dans les cas extrêmes de $q$ très-grand ou très-petit par rapport à $p$. On peut par la considération immédiate de ce facteur, abréger les raisonnemens précédens; car puisqu'on a $H = \left(\frac{q}{p+q}\right)^2 \cdot \frac{v^2 . \sin^2 . \varphi}{2g}$ on voit qu'en supposant la vitesse et la dépense du canal constantes, on a $H = \frac{v^2 \cdot \sin^2 . \varphi}{2g}$ lorsque $q$ est très-grand par rapport à $p$; et l'on a $H = 0$ lorsque $q$ est très-petit par rapport à $p$: or ces deux conditions dépendent uniquement de la hauteur de la digue, puisque la dépense et la vitesse sont supposées constantes.

Mais il convient d'examiner plus particulièrement la valeur de $H$ par l'ensemble des facteurs qui la composent. Cette

valeur étant $H = \left(\frac{q}{p+q}\right)^2 \cdot \frac{v^2 . \sin^2 . \varphi}{2g}$, on voit qu'indépendamment du facteur $\sin^2 . \varphi$, que nous supposerons constant, elle est nulle lorsqu'on a $\frac{q}{p+q} = 0$, et lorsqu'on a $v = 0$. Le premier cas repond à celui d'une digue dont la hauteur est nulle ou très-petite par rapport à la hauteur de la section verticale du courant, de sorte que $\frac{q}{p}$ est zéro ou une très-petite fraction. L'autre cas repond à une vitesse nulle ou très-petite du courant. Mais les valeurs de $E$ qui correspondent à ces deux cas, où $H$ est également zéro, sont très-différentes entr'elles : car dans le premier cas, où l'on a $\frac{q}{p+q} = 0$, sans qu'on ait $v = 0$, l'étendue $E$ est nulle ou très-petite: dans le deuxième cas, où l'on à $v = 0$ sans qu'on ait $\frac{q}{p+q} = 0$, l'étendue $E$ a la plus grande valeur possible, et est égale à l'horizontale $AC$ ( fig. 5.$^e$ ).

Nous avons déjà remarqué que dans les courans que nous considérons ici, il existe entre la dépense, la vitesse moyenne et la hauteur de la section, des rapports tels que l'on ne peut augmenter ou diminuer l'une de ces quantités, sans augmenter ou diminuer en même temps les autres. D'après cela considérons les variations simultanées des deux facteurs $\left(\frac{q}{p+q}\right)^2$ et $\frac{v^2}{2g}$ dans l'équation $H = \left(\frac{q}{p+q}\right)^2 \cdot \frac{v^2 . \sin . \varphi^2}{2g}$. Si l'on suppose que la hauteur de la digue soit d'abord telle que

$q$ soit très-grand par rapport à $p$, et qu'en même temps la vitesse $v$ soit très-petite, $H$ aura la valeur très-petite .... $\frac{v^2 . \sin^2 . \varphi}{2g}$. Maintenant, la hauteur de la digue restant la même, augmentons la dépense $p$ du canal; il est clair que la hauteur de la section et la vitesse moyenne $v$ augmenteront en même temps. Continuons à augmenter la dépense $p$ jusqu'à ce qu'elle soit très-grande par rapport à $q$: à cette limite la hauteur de la section verticale du courant sera devenue très-grande par rapport à la hauteur de la digue, l'étendue du remou sera très-petite, et la valeur de $H = \left(\frac{q}{p+q}\right)^2 . \frac{v^2 . \sin^2 . \varphi}{2g}$ sera pareillement très-petite à cause du facteur très-petit $\left(\frac{q}{p+q}\right)^2$.

Ainsi la hauteur $H$ pour une même digue, est très-petite dans les deux cas extrêmes, savoir dans celui d'une vitesse très-petite et dans celui d'une vitesse très-grande du courant. Il y aura donc, pour une même digue, une dépense ou une vitesse telle qui donnera pour $H$ un maximum. Partant une digue établie à travers un canal ou un fleuve occasionne la plus grande étendue possible du remou, lorsque la vitesse du courant ou sa dépense est la moindre possible. Lorsque la dépense du fleuve augmente, l'étendue du remou diminue, et augmente la hauteur du regonflement au-dessus de la surface naturelle du courant, en prenant cette surface à l'origine du remou. Cette hauteur augmente toujours jusqu'à ce qu'on arrive à une dépense telle, où cette hauteur est la

plus grande possible. Après celà, la dépense continuant à augmenter, l'étendue du remou et la hauteur du regonflement diminuent sans cesse jusqu'à devenir à peu-près insensibles.

Enfin nous remarquerons qu'il y a encore un cas, où la hauteur $H$ du regonflement au-dessus de la surface naturelle du courant, augmente toujours à mesure que la dépense ou la vitesse du courant augmente. C'est lorsque la quantité $q$ étant toujours très-grande ou infinie par rapport à $p$, la valeur de $H$ devient $H = \frac{v^2 . \sin^2 . \varphi}{2g}$. Ce cas peut avoir lieu à l'embouchure des fleuves qui se jettent dans la mer. Il est visible que les eaux de la mer peuvent être regardées comme refoulées par une digue établie à une distance infinie de l'embouchure, et telle que le volume $q$ de ces eaux est toujours infini par rapport à la dépense $p$ du fleuve. Partant la hauteur $H$ du regonflement sera constamment égale à la quantité $\frac{v^2 . \sin^2 . \varphi}{2g}$, et augmentera toujours avec la vitesse du courant. Dans ce même cas l'étendue du remou ne pourra plus être calculée par l'équation (1) relative à une digue donnée de position: mais on devra partir d'un point fixe pris, par exemple, sur l'un des bords du fleuve près de son embouchure, et l'étendue $E$ du remou, facile à déduire d'après le profil du fleuve, et la position connue du niveau de la mer, pourra être positive ou négative par rapport à ce point, selon les divers états du fleuve et de la surface de la mer.

27. Nous terminerons ici ces refléxions générales sur l'étendue et la hauteur du remou. L'influence qu'y a la pente du courant, est assez évidente par elle-même pour qu'il soit nécessaire de s'y arrêter. Nous observerons seulement, que dans un canal qui ne soit ni horizontal ni vertical, et dont la vitesse du courant ne soit pas nulle, l'étendue $E$ du remou occasioné par une digue, sera toujours moindre que l'horizontale $AC$ ( fig. 5.$^e$ ). C'est ce qui résulte de l'équation (1) du n.° 21 et de la valeur de cette horizontale donnée dans le même numéro. Il est vrai que dans les cas les plus ordinaires, où la vitesse $v$ est peu considérable, l'étendue du remou sera à-peu-près égale à l'horizontale dont on vient de parler. En effet en faisant $v = 2,^{pieds}25$ on a $\frac{v^2}{2g} = 1.^{pouc.}$ Ce serait la valeur de $H$ dans un canal d'une très-petite pente. Cette hauteur du regonflement, peu sensible en elle-même, le sera encore moins par la circonstance que près des bords du canal le remou s'étend davantage et la hauteur $H$ y est tout-à-fait insensible. Mais lorsque la vitesse $v$ sera considérable, l'étendue $E$ du remou sera sensiblement moindre que l'horizontale $AC$, et la hauteur $H$ pourra arriver à plusieurs pieds ainsi qu'on l'observe à l'embouchure des fleuves dans des lacs ou dans la mer.

Nous observerons en dernier lieu, que des obstacles quelconques opposés à un courant, tels que l'eau stagnante d'un lac ou de la mer, le passage brusque d'une pente forte à une pente plus douce, ou à une contrepente, passage qui produit

dans les rivières, à l'époque des crues, ces regonflemens connus sous le nom de *ventres des crues*; des corps ou ouvrages existans dans le lit; tous ces obstacles, dis-je, occasioneront des remous dont la hauteur et l'étendue suivront une marche analogue à celle que nous venons de développer. Ainsi selon les dimensions et la position de ces divers obstacles, il y aura, dans le cours d'un fleuve, des regonflemens, qui, dans les eaux ordinaires, auront une étendue presque totale, et une hauteur insensible au-dessus de la surface naturelle du courant, à l'origine du regonflement; tandis que dans les crues, ces mêmes regonflemens auront une moindre étendue, et une plus grande hauteur au-dessus de la surface du courant, à l'origine du remou. D'autres regonflemens seront tels que leur hauteur sera très-marquée dans les eaux ordinaires, et disparaîtra dans les crues. Enfin il y en aura de ceux dont la hauteur au-dessus de la surface du courant augmentera toujours, à mesure que les crues deviendront plus considérables.

## §. VI.

### *Propagation du remou.*

28. L'équation $H = \left(\frac{q}{p+q}\right)^2 . \frac{v^2 . \sin^2 . \varphi}{2g}$ peut aussi servir à calculer la vitesse de la propagation du remou, que l'on observe dans un courant, lorsqu'on barre entièrement le canal par

une digue, et que la digue et les parois du canal ont assez de hauteur pour que les eaux ne puissent pas déborder. Dans ce cas l'équation précédente deviendra $H = \frac{v^2 . \sin^2 . \varphi}{2g}$, puisque $q$ est toujours comme infini par rapport à $p$, lorsque le remou s'est établi d'une manière permanente.

Soit (fig. 8.e) $CKNV$ un canal rectangulaire, de pente uniforme, et dont le fond $KN$ est parallèle à la surface $CV$ du courant. Supposons qu'à l'endroit $N$ on a établi une digue verticale $NR$ indéfinie, qui empêche tout écoulement de l'eau dans la partie inférieure du canal, et cherchons la loi de la propagation du remou contre le courant. Considérons le mouvement apparent du remou de $B$ vers $C$, lorsque le remou s'est établi d'une manière permanente, c'est-à-dire lorsque la hauteur $BD$ conserve par tout la même valeur. Cette circonstance aura lieu dès que la hauteur de l'eau contre la digue sera parvenue à un point $A$ tel que la verticale $BD$, comprise entre le point $B$ et l'horizontale $AD$, soit égale à la valeur de $H$ donnée par l'équation . . . . . . $H = \frac{v^2 . \sin^2 . \varphi}{2g} = BD$. La même circonstance aura lieu ensuite quelles que soient la hauteur de l'eau contre la digue, et l'étendue du remou dans la longueur indéfinie du canal. En supposant donc que le remou se soit établi de la manière qu'on vient d'expliquer, le prisme d'eau $NADY$ deviendra après le temps $dt$, $NA'D'Y'$. En conservant les dénominations dont nous avons fait usage dans le n.° 21, nous aurons

$BF = B'F' = h;$

$BY = B'Y' = LN = \frac{h}{\sin.\varphi};$

$BD = B'D' = H = \frac{v^2.\sin^2.\varphi}{2g};$

$v$ étant la vitesse moyenne du courant, et $g = 30,^{pieds} 1958$; $AD = E = NX =$ à l'étendue variable du remou dans le sens horizontal. Le triangle $YXN$, semblable au triangle $KGF''$, donne

$$XY = \frac{E.\cos.\varphi}{\sin.\varphi};$$

en faisant enfin $AN = F =$ à la hauteur variable de l'eau contre la digue, ou à l'étendue du remou dans le sens vertical, et $DY = H + \frac{h}{\sin.\varphi} = M$, quantité constante, on aura $F = M + \frac{E.\cos.\varphi}{\sin.\varphi}$.

Le volume du prisme $NADY$ sera

$$\frac{aE}{2}.\left(2M + \frac{E.\cos.\varphi}{\sin.\varphi}\right)$$

$a$ étant la largeur constante du canal. Après le temps $dt$ ce prisme étant devenu $NA'D'Y'$, on aura

$XX' = dE$; $AA' = dF = \frac{dE.\cos.\varphi}{\sin.\varphi}$;

et la différence entre les volumes de ces deux prismes sera

$$a\left[M + \frac{E.\cos.\varphi}{\sin.\varphi}\right].dE.$$

Or $p = ahv$ étant la dépense constante et donnée du canal, on aura l'équation

$$pdt = a\left[M + \frac{E.\cos.\varphi}{\sin.\varphi}\right].dE;$$

en l'intégrant de manière qu'on ait $E = e$, lorsque $t = 0$, $e$ étant une étendue quelconque depuis que le remou s'est établi d'une manière permanente, on aura

(I) $E^2.\cos.\varphi + 2EM\sin.\varphi - 2eM\sin.\varphi - e^2\cos.\varphi - 2hvt\sin.\varphi = 0.$

L'équation $dF = \frac{dE\cos.\varphi}{\sin.\varphi}$ étant intégrée de manière que l'on ait $F = M + \frac{e\cos.\varphi}{\sin.\varphi}$ lorsque $E = e$, donne

(II) $F = M + \frac{E.\cos.\varphi}{\sin.\varphi}.$

Ces équations (I) et (II) renferment tout ce qui est relatif à la propagation du remou soit dans le sens horizontal de $A'$ vers $D'$, soit dans le sens vertical de $A$ vers $A'$.

Dans le cas d'un canal horizontal on a $\cos.\varphi = 0$, $M = H + h$, et les équations (I) et (II) donnent

$$E = e + \frac{hvt}{H+h};$$
$$F = H + h.$$

Partant dans ce cas l'eau refoulée par la digue n'a pas de mouvement ascensionnel, et sa surface $AD$ conserve toujours, pendant la propagation du remou, le même niveau, élevé au-dessus du fond de la quantité constante $H + h$. Le mouvement apparent du remou contre le courant est uniforme, et il se fait avec la vitesse $\frac{h}{H+h}.v$; et l'eau, dans toute

l'étendue du remou, est sans mouvement. Lorsque sin . $\varphi = 0$, on a le cas d'un vase qui reçoit continuellement un volume constant d'eau par un jet vertical, et il est facile d'avoir la loi du mouvement ascensionnel de l'eau dans le vase, lorsque la figure de celui-ci est connue et donnée. Dans les cas intermédiaires les équations (I) et (II) donneront toutes les circonstances du mouvement dont il s'agit.

## §. VII.

### *Expériences sur la mesure des eaux courantes dans un canal.*

29. En faisant les expériences précédentes sur le remou j'ai pu prendre, par la mesure immédiate, tous les élémens que l'on considère dans le mouvement de l'eau dans un canal de figure et de pente données, et dont le courant est bien établi et permanent. Je pouvais ainsi comparer les résultats de l'expérience avec ceux que donnent les formules connues du mouvement de l'eau dans les canaux et dans les fleuves, déduites de la théorie du mouvement linéaire des fluides, combinée avec la loi de la résistance que le fond et les parois des canaux opposent à ce mouvement.

Pour cela je me suis servi de la partie du canal n.° 1 à l'aval de l'endroit où l'on établissait les digues. La pente de cette partie est uniforme (n.° 7, et fig. 1.ère) et la surface du courant, sur la longueur de 16 pieds, comptés du dit endroit,

était sensiblement parallèle au fond du canal, ainsi que je m'en suis assuré directement. Pour comparer les résultats de l'expérience avec ceux du calcul, j'ai pris la formule donnée par M. EYTELWEIN dans les mémoires de l'Académie Royale de Berlin pour les années 1814-15, partie mathématique pag. 172. Cette formule déduite de la théorie et dont les coëfficiens relatifs à la loi de la resistance ont été soigneusement déterminés d'après un très-grand nombre d'expériences, très-variées entr'elles, est, ce me semble, la plus parfaite qu'on ait jusqu'à-présent sur cet objet : elle donne pour la vitesse moyenne du courant,

$$c = -(0{,}0067675)\,g + \sqrt{(557{,}798)\,g \, . \frac{ah}{pl} + (0{,}000\,0458)\,g^2}$$

où l'on a designé par

$c$ la vitesse moyenne du courant ;

$g$ la hauteur d'où tombe librement un corps grave dans la première seconde du temps ;

$a$ la section du courant ;

$p$ le périmètre de la section, en y comprenant seulement le fond et les deux côtés latéraux ;

$l$ la longueur du lit du canal, à laquelle correspond la chûte $h$ ;

$\frac{h}{l}$ la pente du canal prise à la surface de l'eau, qui est elle-même supposée parallèle au fond du canal.

En prenant le pied de Paris pour unité linéaire, c'est-à-dire en faisant $g = 15{,}^{pieds}0979$, cette formule devient

$$c = -0{,}1022 + \sqrt{(8421{,}5784)\frac{ah}{pl} + 0{,}0104}\,.$$

Dans les expériences que je vais rapporter, la pente $\frac{h}{l}$ est la même pour toutes, et l'on a, d'après le profil du fond du canal, auquel la surface du courant était parallèle, $h = 4.^{pouc.} 2.^{lign.} \frac{5}{12}$ et $l = 18.^{pieds}$; ainsi l'on a, pour toutes ces expériences $\frac{h}{l} = 0{,}019451$. Il en est de même de la largeur du canal qui est d'un pied, les parois étant verticales et perpendiculaires au fond. On a reuni dans le tableau suivant les résultats de ces expériences.

| Expériences. | Dépense du canal. | Hauteur de la section du courant. | $a$ | $p$ | $\frac{a}{p}$ | Valeur de $c$ donnée par la formule. | Valeur de $c$ qu'on obtient en divisant la dépense par la section. | Différence. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | pieds cub. | pouc. lign. | pied. car. | pieds | pieds | pieds | pieds | pieds |
| 1.e | 0,6060 | 1. 8. $\frac{9}{12}$ | 0,144097 | 1,288194 | 0,111860 | 4,1798 | 4,2055 | — 0,0257 |
| 2.e | 1,0255 | 2. 6. $\frac{3}{12}$ | 0,210069 | 1,420138 | 0,147922 | 4,8211 | 4,8817 | — 0,0606 |
| 3.e | 1,3626 | 3. 1. $\frac{8}{12}$ | 0,261574 | 1,523148 | 0,171732 | 5,2024 | 5,2092 | — 0,0068 |

On voit par ce tableau l'accord le plus parfait entre les résultats de l'expérience et ceux donnés par la formule de M. Eytelwein. La plus grande différence entre la vitesse

calculée et la vitesse observée n'arrive pas à $\frac{1}{80}$ de cette dernière vitesse. A la vérité cette formule, dont les coëfficiens relatifs à la loi de la resistance ont été déterminés d'après un très-grand nombre d'expériences, faites dans des canaux très-considérables et même dans des fleuves, par des observateurs divers, n'avait pas besoin des nouvelles comparaisons qu'on vient de rapporter, pour acquerir un nouveau degré de confiance : toutefois j'ai cru devoir profiter de l'occasion que j'avais de les faire, s'agissant de la mesure des eaux courantes dans les canaux et dans les fleuves, et de la solution aussi exacte que simple de cet important problème d'Hydrométrie.

# DEUXIÈME PARTIE.

---

## *Expériences sur la propagation des ondes.*

1. M'étant proposé de faire des expériences sur la propagation des ondes, et d'en comparer les résultats avec ceux des formules données par M. Poisson dans son beau et savant mémoire sur la théorie des ondes (*); j'ai dû avant tout examiner jusqu'à quel point la manière de produire les ondes que cette théorie exige, pouvait être réellement pratiquée sans qu'aucune circonstance physique, étrangère aux considérations théoriques, pût rendre les expériences telles à ne pas pouvoir y être comparées. Cette théorie suppose que les ondes ont été produites par un corps de figure donnée, peu enfoncé dans le fluide, en sorte que la flèche du segment plongé soit très-petite par rapport aux dimensions de la section du corps à fleur d'eau. Cette condition étant remplie, et après avoir donné au fluide le temps de revenir au repos, on retire subitement et verticalement le corps, et l'on considère la propagation des ondes ainsi produites. La première condition, relative aux dimensions du segment plongé, est nécessaire pour qu'on puisse regarder comme appartenant

---

(*) Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1816, pag. 71 et suiv.

toujours à la surface du liquide les molécules qui y étaient d'abord. L'autre condition, celle de laisser revenir le fluide au repos, et de retirer subitement le corps, est exigée pour que les ondes puissent être censées produites par la seule action de la gravité.

2. Il est facile de remplir exactement la condition relative aux dimensions du segment plongé, et de rendre l'eau stagnante avant de le retirer : on peut aussi imprimer au corps, en le retirant, une grande vitesse. Mais dans cette opération a lieu une circonstance qu'on ne saurait aucunement empêcher : elle consiste en ce qu'en retirant subitement le corps, il se forme après lui une colonne liquide, qui le suit, et s'élève au-dessus du niveau beaucoup plus de ce que comporterait la seule action de la gravité ; c'est-à-dire de ce qu'il arriverait, si au lieu du segment, il y eut à la surface du liquide une simple cavité, tout-à-fait égale au segment plongé, et qu'il fut possible de tenir l'eau dans cet état sans aucun moyen, et de l'abandonner ensuite à l'action de la pesanteur, en vertu de laquelle elle viendrait occuper cette cavité. Deux causes concourent à élever la colonne d'eau au-delà de ce qui aurait lieu dans l'hypothèse de la cavité précédente. La premiére, qu'on ne peut détruire, est la pression de l'athmosphère sur la surface de l'eau qui environne le segment plongé. L'autre provient de l'adhésion des molécules du liquide entr'elles, et à la surface du corps. De ces deux causes, la pression de l'athmosphère est celle qui contribue le plus à la formation et à l'élévation de la colonne d'eau qui suit le

segment pendant qu'on le tire rapidement hors du liquide. La hauteur et le volume de cette colonne dépendent de la figure du segment plongé et principalement de la vitesse avec laquelle on le retire.

3. L'élévation de la colonne d'eau dont on vient de parler, et la chûte de cette même colonne qui a lieu après, étant une circonstance très-importante dans la propagation des ondes produites de la manière qu'on a exposée, j'ai crû devoir, avant tout, faire, sur l'élévation de cette colonne, des expériences avec des corps divers, plus ou moins plongés. Les dimensions de la colonne d'eau que je note dans chaque expérience, ont été prises par approximation, et assez exactement pour l'objet dont il s'agit. La vitesse avec laquelle on retirait le corps, était la plus grande possible que pouvait imprimer un homme à sa main de bas en haut, en partant du repos et d'une situation commode. Les corps employés sont des solides de bois, faits au tour et polis à leur surface.

1.ère expérience. Avec un cône droit à base circulaire, dont la hauteur était de 9.pouc. 9.lign. et le diamètre de la base de 4.pouc 10.lign. En plongeant ce cône par le sommet à la profondeur de 9.pouc. et en le tirant subitement hors du fluide, il s'est élevé, après lui, une colonne d'eau, de forme cônique, de la hauteur de 5 pouces, et de 4 pouces d'épaisseur ou de diamètre à sa base, qui posait sur la surface de l'eau du reservoir.

2.e expérience. Avec un paraboloïde de révolution dont la hauteur était de 4.pouc. 2.lign. et le diamètre de la base de

8.$^{pouc.}$ 10.$^{lign.}$ En le plongeant par le sommet à la profondeur de 4.$^{pouc.}$, et en le tirant avec vitesse hors de l'eau, il s'est élevé après ce corps, une colonne cônique d'eau, unie, de la hauteur de 7 pouces, environ, le diamètre de sa base étant de 4 pouces, à-peu-près.

3.$^{e}$ expérience. Avec un hémisphère, dont le diamètre était de 6 pouces. En l'enfoncant par le sommet à la profondeur de son rayon, à quelques lignes près, et en le tirant rapidement hors de l'eau, il s'est élevé, après lui, une colonne cônique d'eau, unie, de la hauteur d'environ 8 pouces, et 5 pouces de diamètre à sa base. La figure 1.$^{ère}$ se rapporte à cette expérience.

4.$^{e}$ expérience. Avec l'hémisphère précédent. En l'enfonçant par le sommet de sorte que la flèche du segment plongé était seulement de 2 lignes et $\frac{1}{4}$, et en le retirant ensuite avec vitesse, il s'est élevé, après l'hémisphère, une colonne cônique d'eau de la hauteur d'environ 3 pouces.

5.$^{e}$ expérience. Avec un hémisphère de 5 pouces de diamètre. En le plongeant par le sommet, à la profondeur du rayon, à-peu-près, et en le tirant rapidement hors de l'eau, il s'est élevé après lui une colonne cônique d'eau de la hauteur de 6 pouces, et de 4 pouces de diamètre à sa base.

6.$^{e}$ expérience. Avec l'hémisphère précédent. En l'enfonçant par le sommet, de sorte que la flèche du segment plongé était de 9 lignes, et le tirant avec vitesse hors de l'eau, il s'est élevé une colonne cônique et unie d'eau, de la hauteur d'environ 5 pouces.

7.$^e$ expérience. Avec un segment d'un cylindre droit à base circulaire. Le segment était formé par un plan parallèle à l'axe du cylindre. Sa longueur était de 23 pouces, sa largeur, ou la corde de l'arc circulaire, de 11.$^{pouc.}$ 8.$^{lign.}$, et sa flèche de 6 lignes. En plongeant ce segment de toute sa flèche, à-peu-près, de sorte que sa section à fleur d'eau était un parallèlogramme rectangle dont le grand côté avait 23 pouces de longueur, et le petit côté 11 pouces et 8 lignes, à-peu-près; en le tirant ensuite avec vitesse hors de l'eau, il s'est élevé, après lui, à plus de 2 pieds de hauteur, une colonne d'eau, qui tenait toute la largeur et la longueur du segment. (voyez la fig. 2.$^e$).

De semblables résultats ont lieu en général pour tous les corps, même pour ceux dont la surface est très-lisse, ainsi que je m'en suis assuré en plongeant divers segmens d'un globe de laiton. Les dimensions de la colonne liquide dont il s'agit, sont moindres pour des cônes très-aigus, plongés par leur sommet, et elles augmentent à mesure que la surface du segment plongé approche d'être celle d'un plan, ou d'un disque, où ce phénomène a lieu dans sa plus grande étendue, ce dont je me suis également assuré par l'expérience, et l'on a vu ci-dessus dans les expériences 4.$^e$, 6.$^e$ et 7.$^e$ que des segmens, dont les flèches sont très-petites, et les surfaces plongées sont à-peu-près planes, s'élévent des colonnes d'eau dont les dimensions sont très-considérables. Cette colonne qui suit le corps, se forme toujours et se développe dans toutes ses dimensions, lorsque le corps est tiré avec vitesse hors du

liquide, et qu'il n'est arrêté ou retardé dans son mouvement, qu'au-delà du terme où la colonne se détache naturellement du corps.

4. Après avoir reconnu ce qui a lieu par rapport à cette colonne d'eau, j'ai observé ce qui arrive, dans les mêmes circonstances, par rapport à la production et à la propagation des ondes. J'ai reconnu que le segment du corps étant plongé dans l'eau, et le tout étant à l'état du repos, c'est à l'instant même qu'on commence à tirer le corps hors de l'eau, que les premières ondes se produisent et se propagent à la surface du liquide. Ces ondes sont suivies par d'autres successivement, et pendant qu'elles se forment, et se succèdent les unes aux autres, la colonne liquide élevée par le corps, tombe à l'endroit même, où était plongé le corps, et devient, par sa chûte, une nouvelle cause de production d'ondes, dont l'effet se mêle et se confond avec celui de l'ébranlement primitif produit à l'instant qu'on a retiré le corps. D'après celà on voit que les premières ondes sont tout-à-fait indépendantes de l'effet produit par la chûte de la colonne liquide dont il s'agit, en comptant parmi ces ondes toutes celles qui se forment et se propagent avant la chûte de cette colonne. Le temps qui passe depuis l'instant qu'on retire le corps, et celui où la colonne d'eau élevée commence à tomber, est plus ou moins long selon la hauteur et la figure de cette même colonne. Des fois elle se brise, s'éparpille et tombe par pièces détachées.

5. J'ai aussi observé la production des ondes dans le cas

où l'on tire lentement le solide hors de l'eau. Lorsque la figure du solide est continue, telle que celle d'un hémisphère, d'un paraboloïde, etc. etc., si l'on soulève doucement et lentement le corps et d'un mouvement continu, on n'aperçoit pas d'ondes sensibles jusqu'à ce que le sommet du corps se détache tout-à-fait de l'eau: et c'est à l'instant où le sommet du corps se détache de l'eau, qu'a lieu l'ébranlement à la surface, et que les ondes s'y produisent et s'y propagent. Si le mouvement du corps, lorsqu'on le tire hors de l'eau, quoique lent et doux, se fait par secousses, alors chaque zone du corps à mesure qu'elle sort de l'eau, produit des ondes sensibles.

On a des résultats semblables en observant la production des ondes par l'immersion d'un corps dans l'eau stagnante. À l'instant où le sommet du corps touche la surface de l'eau, les ondes se produisent et se propagent. Si l'immersion du corps se fait lentement, chaque zone qui arrive au contact avec la surface du liquide, produit des ondes. Si l'immersion est rapide de manière que la vitesse du corps, en déscendant, soit plus grande que celle de la propagation des ondes excitées par les premières zones du corps, alors les ondes qui se propagent à la surface de l'eau, sont produites par les dernières zones du corps.

6. Les expériences que je vais rapporter sur la propagation des ondes, ont été faites d'après la théorie de M. Poisson, c'est-à-dire en plongeant très-peu un corps solide de figure connue, et en le retirant subitement et verticalement, après

avoir donné au liquide le temps de revenir à l'état du repos. Chaque expérience a été répétée plusieurs fois et avec tout le soin possible. Le temps a été mesuré avec une montre à secondes bien reglée, et vérifiée, avec laquelle on peut prendre assez bien les tiers et les quarts de seconde, dont j'ai toujours tenu compte. Dans chaque expérience je note l'onde que j'ai observée, et tous les élémens nécessaires au calcul. Le moyen dont je me suis servi pour observer l'arrivée apparente de l'onde à une distance donnée du centre de l'ébranlement, est de la plus grande précision, en même temps qu'il n'exige de placer aucun obstacle dans le canal, dans lequel on fait l'expérience.

*Expériences sur la propagation des ondes à la surface, dans un canal de profondeur et de largeur constantes.*

7. Ces expériences sont relatives au §. III du mémoire de M. Poisson. Le canal dans lequel je les ai faites, a le fond horizontal, et les parois verticales: sa largeur est de 24 pouces et elle est constante sur toute la longueur du canal; les parois et le fond sont en maçonnerie, sans la moindre inégalité, et parfaitement unis et polis dans toute la longueur sur laquelle j'ai opéré.

Pour produire les ondes, je me suis servi de segmens de cylindres droits à bases circulaires. On obtient ces segmens en coupant le cylindre par un plan parallèle à l'axe du cylindre: la longueur du segment est ainsi égale à celle du cylindre;

sa largeur est la corde qui sépare les segmens circulaires dans lesquels se trouvent partagées les deux bases du cylindre : la flèche du segment cylindrique est la même que celle du segment circulaire qui se trouve à chacune des deux bases du segment cylindrique.

On plongeait le segment dans le fluide de manière que sa longueur était perpendiculaire à celle du canal, et que sa section à fleur d'eau était un parallelogramme rectangle qui avait pour côtés la longueur et la largeur du segment cylindrique, ayant cependant soin que le plan supérieur du segment fut toujours tant soit peu au-dessus du niveau du liquide. Le milieu de la longueur du segment coïncidait avec le milieu de la largeur du canal. Les segmens dont je me suis servi, étaient de bois, bien coupés et polis à leur surface : j'en prenais exactement les dimensions, que je note dans les tableaux des expériences.

8. Les ondes que j'ai observées, sont les deux qui précédent toutes les autres: quelques fois je n'ai observé que la deuxième, et c'est lorsque la première n'était pas assez visible pour être saisie avec précision. On a vu plus haut que ces ondes, et quelques unes de celles qui les suivent immédiatement, ne sont point altérées par la chûte de la colonne d'eau, dont on a parlé précédemment. Les formules théoriques avec lesquelles on doit comparer les résultats de ces expériences, sont celles données par M. Poisson au n. 20 de son mémoire, savoir :

pour la 1.$^{ère}$ onde, $x = \frac{gt^2}{2} . (0{,}3253)$;

pour la 2.$^{e}$ onde, $x = \frac{gt^2}{2} . (0{,}1183)$.

De ces formules, en prenant le pied pour unité, et faisant par conséquent $g = 30{,}^{pieds}1958$, on obtient

pour la 1.$^{ère}$ onde, $t = \sqrt{(0{,}2036) . x}$;

pour la 2.$^{e}$ onde, $t = \sqrt{(0{,}5599) . x}$;

$x$ étant l'espace parcouru par l'onde pendant le temps $t$ dans son mouvement apparent sur la surface du liquide, ou bien la distance du centre de l'ébranlement au point où l'on observe l'arrivée de l'onde. C'est de ces formules qu'on a déduit, pour chaque distance, le temps calculé, porté dans les tableaux.

Le canal dans lequel j'ai fait ces expériences, étant toujours le même, je ne noterai, dans chaque expérience, que la profondeur de l'eau, la largeur du canal étant constamment de 24 pouces.

Les arrivées apparentes des deux ondes à une distance donnée, n'ont point été observées l'une après l'autre, dans la même expérience: mais pour éviter toute confusion ou méprise, je faisais une suite d'expériences pour observer l'arrivée de la première onde à une distance donnée: après celà, toutes les circonstances demeurant absolument les mêmes, je faisais une autre suite d'expériences pour observer l'arrivée de la deuxième onde à la même distance, où j'avais observé l'arrivée de la première.

9. Dimensions du segment cylindrique :
Longueur 23 pouces ;
Largeur ou corde 8 pouces ;
Flèche d'enfoncement 7 lignes.

| Profondeur de l'eau dans le canal. | Distance du point d'observation au centre de l'ébranlement. | Arrivée de la *première* onde. | | | Arrivée de la *deuxième* onde. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Temps observé. | Temps calculé. | Différence. | Temps observé. | Temps calculé. | Différence. |
| *pouc. lign.* | *pieds* | | | | | | |
| 24. 5 | 6 | $1''.\frac{1}{16} = 1'',06$ | $1'',11$ | $+0'',05$ | $1''.\frac{11}{15} = 1'',73$ | $1'',83$ | $+0'',10$ |
| 24. 5 | 12 | $1''.\frac{37}{60} = 1'',62$ | $1'',56$ | $-0'',06$ | $2''.\frac{7}{16} = 2'',44$ | $2'',59$ | $+0'',15$ |
| 24. 5 | 18 | $2''.\frac{1}{10} = 2'',10$ | $1'',91$ | $-0'',19$ | $3''.\frac{1}{3} = 3'',33$ | $3'',17$ | $-0'',16$ |

A la distance de 18 pieds du centre de l'ébranlement, la première onde produite avec ce segment, commençait à devenir peu sensible, et il était difficile de la saisir avec toute la précision.

II. TABLEAU.

Dimensions du segment cylindrique:
Longueur 23 pouces;
Largeur ou corde 11 pouces 8 lignes;
Flèche d'enfoncement 6 lignes.

| Profondeur de l'eau dans le canal. | Distance du point d'observation au centre de l'ébranlement. | Arrivée de la *première* onde. | | | Arrivée de la *deuxième* onde. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Temps observé. | Temps calculé. | Différence. | Temps observé. | Temps calculé. | Différence. |
| *pouc. lign.* | *pieds* | | | | | | |
| 20. 6. | 12 | $1''.\frac{5}{9} = 1'',56$ | $1'',56$ | $0'',00$ | $2''.\frac{2}{3} = 2'',67$ | $2'',59$ | $-0'',08$ |
| 23. 3. | 18 | $2''. = 2'',00$ | $1'',91$ | $-0'',09$ | $3''.\frac{1}{6} = 3'',17$ | $3'',17$ | $0'',00$ |
| 24. 8 | 24 | $2''.\frac{3}{8} = 2'',37$ | $2'',21$ | $-0'',16$ | $3''.\frac{3}{4} = 3'',75$ | $3'',66$ | $-0'',09$ |

III. TABLEAU.

Dimensions du segment cylindrique :
Longueur 23 pouces ;
Largeur ou corde 7 pouces 5 lignes ;
Flèche d'enfoncement 1 pouce.

| Profondeur de l'eau dans le canal | Distance du point d'observation au centre de l'ébranlement. | Arrivée de la *première* onde. | | | Arrivée de la *deuxième* onde. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Temps observé. | Temps calculé. | Différence. | Temps observé. | Temps calculé. | Différence. |
| *pouc.* 23 | *pieds* 6 | $1''.0 = 1'',00$ | $1'',11$ | $+0'',11$ | $1''.\frac{3}{4} = 1'',75$ | $1'',83$ | $+0'',08$ |
| 23 | 12 | $1''.\frac{3}{4} = 1'',75$ | $1'',56$ | $-0'',19$ | $2''.\frac{1}{2} = 2'',50$ | $2'',59$ | $+0'',09$ |

L'accord entre les résultats de l'expérience et ceux de la théorie ne saurait être plus parfait. Les petites différences qu'on y remarque, sont toutes comprises dans les limites des erreurs inévitables dans ce genre d'observations, où, outre les erreurs qui peuvent provenir du manque de précision à marquer le commencement et la fin de l'expérience, il y a encore celle qui dérive de la difficulté de saisir l'instant de l'arrivée du sommet de l'onde soit en creux soit en relief, au mouvement apparent duquel se rapportent les formules de M. Poisson. Cette difficulté augmente avec la distance à laquelle

on observe les premières ondes. Je n'ai trouvé d'autre moyen pour atténuer les erreurs provenant de cette cause, que de répéter plusieurs fois la même expérience, et prendre le milieu des résultats les plus approchants entr'eux. Aussi chacune de ces expériences a été répétée trois fois, au moins, et la plupart d'elles l'ont été un plus grand nombre de fois.

10. En faisant ces expériences, il s'est présenté l'occasion, de pouvoir observer la propagation des ondes à la surface du liquide, pendant que l'eau dans le canal avait un mouvement propre, uniforme et contraire à celui de l'onde qu'on voulait observer. Je vais rapporter les résultats de cette expérience : ils ont toujours été les mêmes dans les cinq fois que je l'ai répétée. Ici j'ai observé seulement la 2.<sup>e</sup> onde, comme plus facile que la 1.<sup>ère</sup> à être saisie avec précision. Le mouvement uniforme de l'eau dans le canal avait lieu dans toute sa profondeur et sa largeur, et la vitesse de ce mouvement était de 12 pieds en 39″ : les autres circonstances sont rapportées dans le tableau suivant.

IV. TABLEAU.

Dimensions du segment cylindrique :
Longueur 23 pouces ;
Largeur ou corde 11 pouces 8 lignes ;
Flèche d'enfoncement 6 lignes.

| Profondeur de l'eau dans le canal. | Distance du point d'observation au centre de l'ébranlement. | Arrivée de la *deuxième* onde. | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Temps observé. | Temps calculé corrigé du mouvement propre de l'eau du canal. | Différence. |
| *pouc.* *lign.* | *pieds* | | | |
| 23. 6 | 12 | $2''.\frac{11}{16} = 2'',69$ | $2'',68$ | $-0'',01$ |

Le temps observé est de $2'',69$ ; et pendant ce temps l'eau du canal a parcouru par son mouvement propre, $0^{pieds},8277$ ; partant l'espace décrit par l'onde dans son mouvement apparent a été de $12^{pieds},8277$. En mettant ce nombre au lieu de $x$ dans la formule relative au mouvement de la 2.^e onde, on trouve pour la valeur théorique de $t$, celle portée dans le tableau ; et l'on voit encore ici le plus parfait accord entre la théorie et l'expérience.

11. Les segmens cylindriques employés dans les expériences précédentes ne pouvaient rendre assez sensibles les deux premières ondes à des distances plus grandes que celles portées dans les tableaux précédens : ainsi désirant faire des

expériences à de plus grandes distances, j'ai pris un autre segment cylindrique d'une plus grande largeur ou corde, et tel qu'à la distance de 30 et même de 42 pieds du centre de l'ébranlement, les deux premières ondes étaient encore visibles, et particulièrement la deuxième, dont j'ai pu observer très-bien l'arrivée apparente aux distances énoncées. Mais ici les résultats de l'expérience, au moins ceux que j'ai obtenus à la distance de 42 pieds, s'éloignent sensiblement de ceux du calcul. Je vais les rapporter dans le tableau suivant, et comme j'ai répétées ces expériences plusieurs fois et dans des jours différens, j'y noterai la moyenne de chaque suite d'observations pour une même expérience.

V. TABLEAU.

Dimensions du segment cylindrique:
Longueur, 23 pouces.
Largeur ou corde, 16.$^{pouc.}$ 10.$^{lign.}$
Flèche d'enfoncement, 1.$^{pouc.}$ 1.$^{lign.}$ $\frac{3}{4}$.

| Profondeur de l'eau dans le canal. | Distance du point d'observation au centre de l'ébranlement. | Arrivée de la *deuxième* onde. | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Temps observé. | Temps calculé. | Différence. |
| *pouc. lign.* | *pieds* | | | |
| 24. 7 | 30 | $4''.\frac{1}{6}=4'',17$ | $4'',10$ | $-0'',07$ |
| 24. 4 | 30 | $4''.\frac{11}{18}=4'',61$ | $4'',10$ | $-0'',51$ |
| 24. 4 | 42 | $6''.\frac{1}{5}=6'',20$ | $4'',85$ | $-1'',35$ |
| 24. 9 | 42 | $6''.\frac{1}{4}=6'',25$ | $4'',85$ | $-1'',40$ |
| 24. 3 | 42 | $6''.\frac{11}{36}=6'',31$ | $4'',85$ | $-1'',46$ |

Parmi ces cinq expériences, les deux premières, faites à 30 pieds de distance, ont été répétées trois fois chacune, dans deux jours différens. La première des trois dernières expériences, faites à 42 pieds de distance, a été répétée

cinq fois, et les deux dernières trois fois chacune. Chaque suite d'observations a été faite dans des jours différens.

On voit par ce tableau que les deux premières expériences, faites à 30 pieds de distance, donnent des résultats, dont les différences avec ceux du calcul peuvent encore être regardées comme comprises dans les limites des erreurs dont ces expériences sont susceptibles. Mais les expériences faites à 42 pieds de distance donnent des résultats trop forts par rapport à ceux du calcul. Ce sont onze observations partagées en trois suites, faites dans des jours différens pour chaque suite, qui donnent à très-peu-près le même résultat. Les circonstances du canal étaient les mêmes à 42 pieds de distance, qu'à 30, 24 etc.

En admettant donc la justesse des résultats obtenus par l'observation, il faut conclure que l'excès du tems observé sur celui donné par les formules, est dû, soit à l'influence de quelque élément dont on a fait abstraction dans la théorie, tel que le frottement et l'imparfaite fluidité de l'eau; soit à l'influence des termes qu'on néglige dans le calcul; soit, enfin, à l'une et à l'autre de ces deux circonstances. Il faut en outre que cette influence soit peu sensible à des petites distances et qu'elle augmente à des distances plus considérables.

12. Dans les expériences qui précédent, je me suis servi, pour produire les ondes, de segmens cylindriques d'une grande largeur ou corde, et cela pour observer le mouvement apparent des premières ondes à de grandes distances, et

rendre ainsi peu sensibles les erreurs provenant de la mesure du temps total employé par l'onde à se propager au point où on l'observait. Mais aussi ces segmens, en les retirant subitement, élévaient toujours après eux, une large et haute colonne liquide, qui retombait bientôt, et excitait, par sa chûte, des nouvelles ondes. C'est pour cela que je n'ai pas fait d'expériences sur le mouvement des nœuds des ondes dentelées, considérées par M. Poisson dans son mémoire et dont l'existence est très-réelle et que j'ai eu très-souvent l'occasion d'observer.

Toutefois j'ai fait quelques expériences sur le temps qui passe, depuis l'instant de la production des ondes, pour que la surface de l'eau, à une distance donnée du centre de l'ébranlement, s'élève à une hauteur donnée au-dessus de son niveau primitif, auquel on rapporte le mouvement des ondes dans le sens vertical. Ces expériences ont été faites dans le même canal décrit précédemment, et les résultats qu'elles ont donnés, se trouvent dans le tableau suivant.

VI. TABLEAU.

Dimensions du segment cylindrique :
Longueur 23 pouces ;
Largeur ou corde 11 pouces 8 lignes ;
Flèche d'enfoncement 6 lignes.

| Profondeur de l'eau dans le canal. | Distance du point d'observation au centre de l'ébranlement. | Élévation au-dessus du niveau. | Temps observé. |
|---|---|---|---|
| *pouc. lign.* | *pieds* | *lign.* | |
| 24. 6 | 12 | 1. $\frac{1}{2}$ | 4″. |
| 24. 5 | 12 | 2. | 6″. |

Ainsi dans les ondes produites avec les circonstances qu'on vient de rapporter, la surface de l'eau, à 12 pieds de distance du centre de l'ébranlement, était, après 4″ depuis l'instant de la production des ondes, à 1,$^{lign.}$5 au-dessus de son niveau primitif, et c'était la première fois, depuis la production des ondes, qu'elle avait atteint cette hauteur à cet endroit. Pareillement la surface de l'eau était, au même endroit, et pour la première fois depuis la production des ondes, de 2 lignes au-dessus de son niveau primitif, à l'instant de 6″ depuis l'origine du mouvement.

Pour calculer d'après la théorie et dans les circonstances

des expériences qu'on vient de rapporter, le temps pour une élévation donnée de la surface à une distance donnée ; ou bien l'élévation de la surface à une distance et après un temps donné il faudrait employer la formule $Z' = KT$; (mémoire de M. Poisson n.22) mais la fonction $T$, ainsi que l'observe M. Poisson, varie très-rapidement, et passe dans un temps très-court de son maximum positif à son maximum négatif: la formule précédente ne peut donc, par sa nature, comporter la moindre erreur du côté de l'expérience, ni aucune expérience ne pourrait soutenir l'épreuve d'une pareille formule. Ainsi, par exemple, dans la 1.ère expérience, où le temps observé est de $4''$, la fonction $T$ est négative, et elle devient positive pour $t = 4'',33$. Pareillement dans la 2.e expérience où le temps observé est de $6''$, la fonction $T$ est négative, et en prenant $t = 6'',23$ la même fonction devient positive. On voit par-là que la formule dont il s'agit ne peut aucunement servir à comparer les résultats de l'expérience avec ceux de la théorie relativement à la hauteur du liquide dans un endroit donné par rapport au niveau primitif de sa surface: aussi M. Poisson s'est-il servi de la formule dont il s'agit pour déterminer les loix du mouvement des *nœuds* de ces groupes d'ondes qu'il appelle *dentelées*.

*Expériences sur la propagation du mouvement dans le sens de la profondeur du canal.*

13. Pour ces expériences je me suis servi du même canal et les ondes ont été produites de la même manière que pour les expériences précédentes. La profondeur que je pouvais donner à l'eau dans ce canal, n'était pas, à la vérité, très-grande par rapport à la largeur de la section à fleur d'eau des segmens que j'employais : car voulant rendre très-visibles les premières ondes, je ne pouvais obtenir ce but, qu'en produisant les ondes avec des segmens d'une certaine largeur. Cependant les expériences que je vais rapporter, ne laissent, ce me semble, aucun doute sur la propagation du mouvement à de grandes profondeurs. Voici la manière dont j'ai fait ces expériences.

Le canal aboutit par une de ses extrémités à un reservoir ou, plus exactement, à une tour qu'on peut remplir d'eau au moyen du même canal, le fond *B* de cette tour ( fig. 3.$^e$ ) étant de beaucoup plus bas que celui du canal. Près de cette extrémité du canal il y a dans son fond et dans ses parois une rainure *CD* dans laquelle on peut introduire et arrêter une vanne ou une cloison, à telle hauteur que l'on veut, au-dessus du fond du canal. Au moyen de cette cloison lorsqu'il y a de l'eau d'une part et de l'autre de la cloison, la communication entre les deux eaux ne peut se faire que par l'ouverture plus ou moins haute qu'on laisse sous la cloison près du fond au point *D*, cette ouverture ayant d'ailleurs toute la largeur du canal.

Ainsi le niveau de l'eau stagnante étant *SCAE*, la profondeur de l'eau *CD*, et la hauteur de l'ouverture en *D* étant connue, je produisais les ondes en *S*, et j'observais si elles parvenaient à se manifester à la surface *AE* placée de l'autre côté de la cloison. Je variais à volontè la distance du centre *S* de l'ébranlement à la cloison, ainsi que la hauteur de l'ouverture *D*. Ici je ne rapporterai que les expériences faites avec la moindre hauteur de cette ouverture. La propagation des ondes au-delà de la cloison était toujours plus sensible et plus rapide, et avait lieu pour de plus grandes distances du centre de l'ébranlement, à mesure que l'ouverture sous la cloison avait plus de hauteur.

VII. TABLEAU.

Dimensions du segment cylindrique :
Longueur 23 pouces ;
Largeur ou corde 7.$^{pouc.}$ 5$^{lign.}$ ;
Flèche d'enfoncement 1.$^{pouc.}$ 1.$^{lign.}\frac{1}{2}$.

| Profondeur de l'eau dans le canal. | Distance du centre *S* de l'ébranlement à la cloison. | Hauteur de l'ouverture *D* au-dessous de la cloison. |
|---|---|---|
| *pouc.* *lign.* 23. 9 | *pieds* 6 | *pouc.* *lign.* 0. 9 |
| 23. 9 | 12 | 0. 9 |
| 23. 9 | 18 | 0. 9 |

Dans toutes ces expériences on voyait se propager à la surface $AE$, au-delà de la cloison, les ondes, savoir, la première, la deuxième et les suivantes jusqu'à ce que toute la surface $AE$ était vivement agitée par l'arrivée des ondes plus fortes, et par leur refléxion contre la paroi $EF$ et par leur choc mutuel. Tout comme dans le canal libre, la première onde produite par l'émersion du segment, a son profil en creux par rapport au niveau primitif de la surface du liquide, de même la première onde qui se manifestait à la surface $AE$, au-delà de la cloison, avait son profil en creux par rapport au même niveau primitif. L'arrivée de cette première onde à la surface $AE$ était si visible, que j'ai pu noter l'instant qu'elle se manifestait à un point déterminé $A$ de cette même surface: les circonstances de cette expérience se trouvent dans le tableau suivant.

VIII. TABLEAU.

Dimensions du segment cylindrique :
Longueur 23 pouces ;
Largeur ou corde 11.$^{pouc.}$ 8.$^{lign.}$ ;
Flèche d'enfoncement 6.$^{lign.}$.

| Profondeur de l'eau dans le canal. | Distance de la cloison au centre *S* de l'ébranlement. | Hauteur de l'ouverture *D* sous la cloison. | Distance du point *A* d'observation à la cloison. | Temps observé, employé par la première onde à arriver en *A*. |
|---|---|---|---|---|
| *pouc. lign.* 21. 8 | *pieds* 3 | *pouc.* 1 | *pieds pouc.* 1. 6 | 2″ |

S'il n'y avait pas eu la cloison, le temps employé par la première onde à parvenir au point *A*, c'est-à-dire à parcourir 4.$^{pieds}$ 6.$^{pouc.}$ aurait été de 0″,96.

### *Expériences sur la propagation des ondes à la surface du fluide indéfini.*

14. Dans ces expériences je me suis borné, comme dans les précédentes et par les mêmes motifs, à observer les ondes qui précédent toutes les autres, et en outre je n'ai observé que la deuxième, dont le profil est en relief, car les segmens que j'ai employés ayant de petites dimensions, la première onde au point d'observation n'était guère visible,

et il était difficile de la saisir avec précision. La loi du mouvement de cette deuxième onde est donnée par la formule

$$r = \frac{gt^2}{2}\left(0{,}1289\right)$$

(mémoire cité, n.° 39) laquelle en prenant le pied pour unité, donne

$$t = \sqrt{(0{,}5138)r}$$

$r$ étant la distance à laquelle parvient l'onde pendant le temps $t$, cette distance étant comptée depuis le centre de l'ébranlement.

IX. TABLEAU.

Segmens sphériques.

Pour la première expérience :

Diamètre de la section à fleur d'eau 2.^pouc.^ 1.^lign.^ ;

Flèche d'enfoncement 2.^lign.^ $\frac{1}{4}$ .

Pour la deuxième expérience :

Diamètre de la section à fleur d'eau 3.^pouc.^ 6.^lign.^ $\frac{3}{4}$ ;

Flèche d'enfoncement 9.^lign.^ .

| Expériences. | Profondeur de l'eau. | Distance du point d'observation au centre de l'ébranlement. | Arrivée de la *deuxième* onde. | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Temps observé. | Temps calculé. | Différence. |
| | *pouc.* *lign.* | *pieds* | | | |
| 1.ère | 16. 8 | 2 | 1″ | 1″,01 | + 0″,01 |
| 2.me | 24. 3 | 2 | 1″ | 1″.01 | + 0″,01 |

L'accord entre les résultats de ces expériences que j'ai répétées plusieurs fois, et ceux de la théorie, ne saurait être plus parfait: c'est ce qui devait arriver, aucune cause physique ne pouvant, à la distance à laquelle on a observé l'onde, altérer la loi de son mouvement apparent, donnée par le calcul. Quant à-présent je n'en ai pas fait à de plus grandes distances et avec des segmens de plus fortes dimensions; ainsi je ne puis dire si à de grandes distances la vitesse du mouvement apparent des ondes à la surface du fluide indéfini sera moindre que celle donnée par le calcul. Il paraît qu'il doit y avoir, sous ce rapport, une différence remarquable entre le cas du fluide contenu dans un canal et celui du fluide indéfini.

15. Tels sont les résultats des expériences que j'ai faites sur le mouvement des ondes; et l'on a vu par ce qui précéde que la théorie de M. Poisson y correspond parfaitement dans tous le cas où l'on a pu exécuter l'expérience d'après les conditions requises par la même théorie. Toute la marche du mouvement des ondes, analisée par M. Poisson, se présente réellement à l'observateur, en suivant leur mouvement et leur propagation: et il n'y a nul doute, que si l'on parvenait à écarter les circonstances physiques qui soit dans la production des ondes, soit pendant leur propagation, peuvent influer sur leur mouvement apparent, les résultats de l'expérience se trouveraient, dans tous les cas, parfaitement d'accord avec ceux de la théorie. Je dois encore noter que si quelqu'un se propose de faire des expériences

sur le mouvement des ondes, il doit prendre pour guide la théorie de M. Poisson, et n'oublier aucune des conditions qu'elle exige; autrement il trouvera par ses expériences des résultats très-différens de ceux qui ont réellement lieu, lorsque les conditions préscrites sont remplies: c'est ce dont j'ai eu plusieurs fois l'occasion de m'assurer par l'expérience même.

16. En terminant l'exposition des résultats que m'a donnés l'expérience sur le mouvement des ondes, je rapporterai quelques observations, que j'ai eu l'occasion de faire sur l'apparence des ondes produites par des disques triangulaires, carrés et elliptiques, soit en frappant par leur plan la surface de l'eau stagnante, soit en les retirant subitement et perpendiculairement à la même surface, après les avoir mis en contact avec elle, ou à peu de profondeur, sans que l'eau monte sur la face supérieure du disque, et après avoir laissé revenir l'eau à l'état du repos.

Le disque triangulaire dont je me suis servi, avait 6.*pouc.* 3.*lign.* de côté: le côté du disque carré était de 9.*pouc.* 6.*lign.* et le disque elliptique avait le grand axe de 18.*pouc.* 6.*lign.* et le petit axe de 7.*pouc.*.

Les figures 4.e, 5.e et 6.e représentent la figure apparente et le mouvement des ondes tout à l'entour de ces disques tels que l'observateur les voit lorsqu'il suit des yeux tout autour du disque et à peu de distance de son périmètre, une suite d'ondes qu'il juge par leur profil, appartenir à un même groupe, et se mouvoir sur des mêmes

lignes tout autour du disque. Pour les disques triangulaire et carré, ces suites d'ondes, telles que l'œil les embrasse, ont une figure renversée par rapport à celle des disques : pour le disque elliptique ces mêmes suites d'ondes ont une figure qui à l'apparence s'élargit rapidement dans le sens du petit axe, et devient bientôt circulaire à peu de distance du disque.

remou

Fig. 1.
Canal No. 1

13.8.10/12

11.1.2/12

8.4.7/12

6.0.0

3.4.0/12

1.6.8/12

0.8.3/12

4.4.4. 0.0.0. 6.0.0. 6.0.0. 6.0.0. 3.0.0. 3.0.0. 18.0.0.

4.3.3/12

Fig. 2
Canal No. 2




10 5 0 10 20 pouces pour les hauteurs verticales

12 6 0 5 10 20 pieds pour les distances horizontales

Chiavale S.

Fig. 3

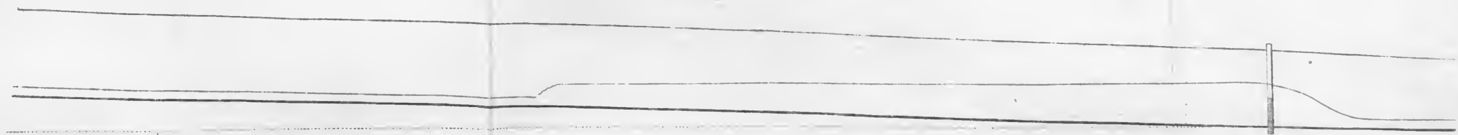


Fig. 4.

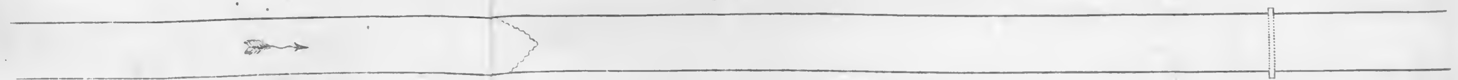


Fig. 6.

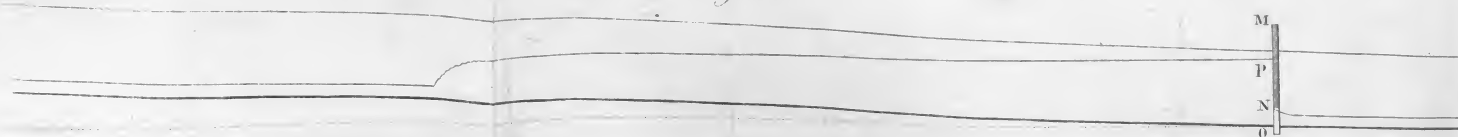
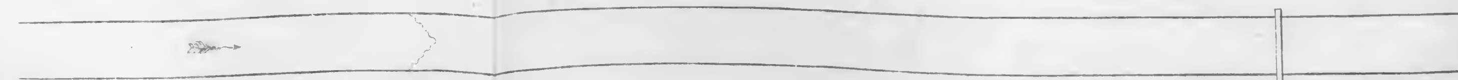
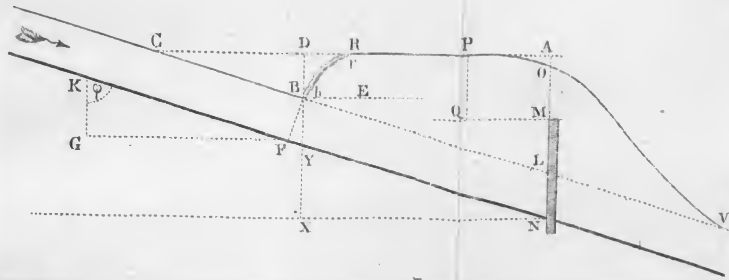


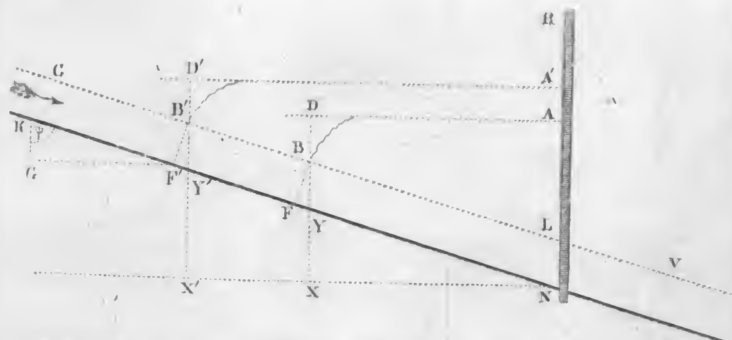

Fig. 7.

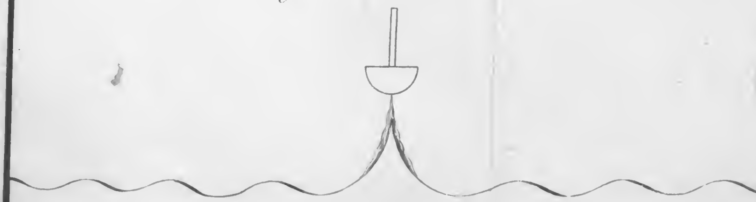


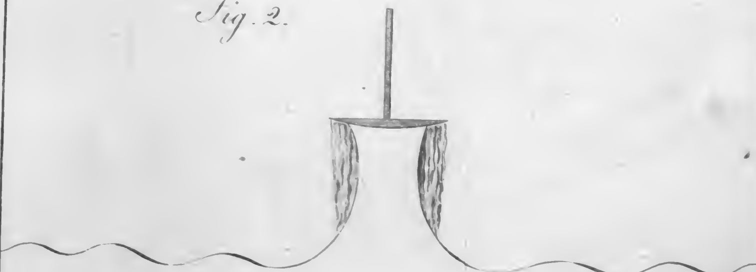
12 9 6 3 0 5 10 15 pieds

Chianale Sc.


Fig. 5.
C
D
R
P
A
K
B
E
O
Q
M
G
F
Y
L
X
N
V


remou
Fig. 8.
R
G
D′
A′
B′
D
A
K
B
G
F′
Y′
F
Y
L
V
X′
X
N


ondes
Fig. 1.


Fig. 2.

Chianale s.

Fig. 3.

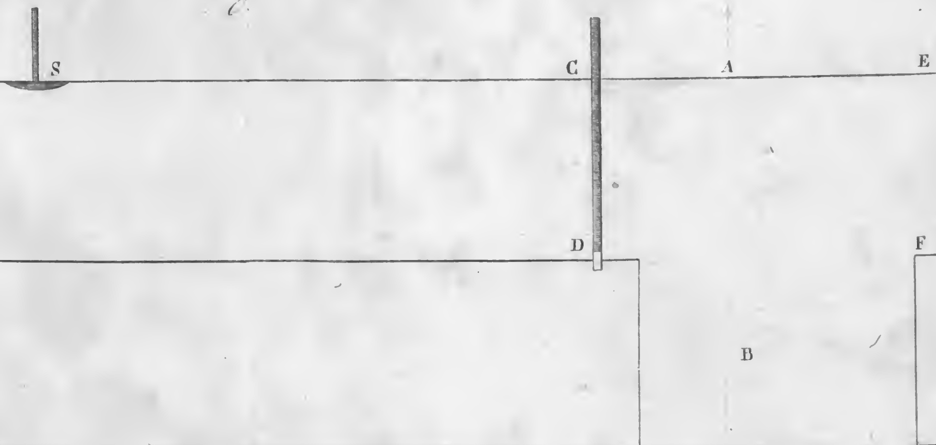



Fig. 4.

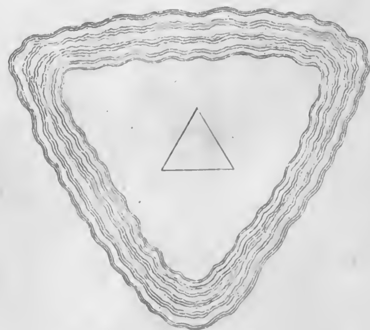


Fig. 5.

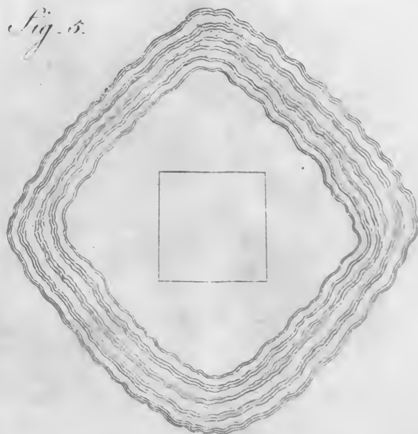


Fig. 6.

